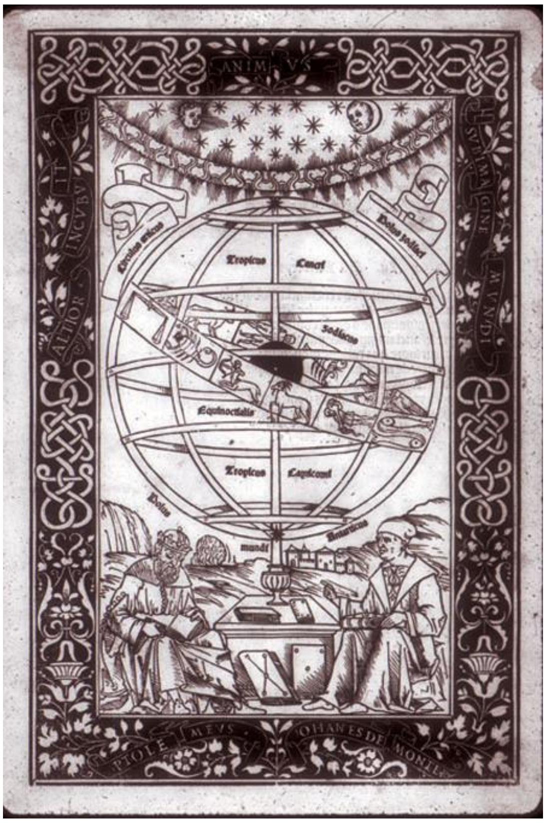
ISBN 9788770668279

Projekt 6.4 Trigonometriens oprindelse - Ptolemaios kordetabeller

Indhold

ISBN 9788770668279

Claudius Ptolemaios levede i Alexandria omkring 150 e.v.t., og han var en meget betydningsfuld astronom, geograf og matematiker. Hans mesterværk ”Almagest” er en omfattende afhandling om alle aspekter af matematisk astronomi bl.a. en model for planeternes bevægelse. ”Almagest” viste sig at blive et særdeles vigtigt værk, som astronomer anvendte mere end 1500 år efter, Ptolemaios skrev det. Værket er blevet oversat flere gange og i slutningen af dette dokument, kan du se tre forskellige udgaver af ”Almagest”.

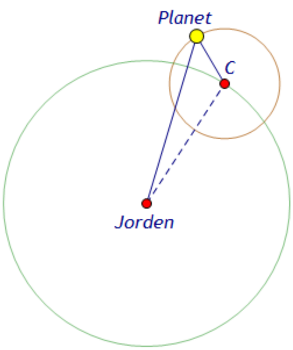


Til højre ses et træsnit, som illustration på en side i en udgave af ”Almagest” fra 1496.

Et af hovedproblemerne i astronomien i oldtiden var beregning af planetbaner. Problemet var, at man ikke kunne finde en model, der rent faktisk passede sammen med de astronomiske observationer målinger man lavede. I dag ved vi, at en af de ting, der især voldte astronomerne store kvaler, var planeternes retrograde bevægelse, dvs. den observation at planeterne somme tider så ud til at bevæge sig baglæns!

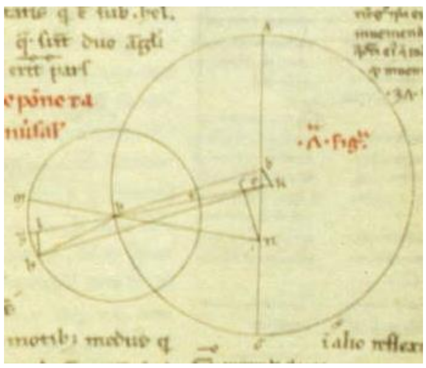
Ifølge Ptolemaios bevægede Solen og alle planeterne (i rækkefølgen Månen, Merkur, Venus, Solen, Mars, Jupiter og Saturn) sig i jævne cirkelbevægelser rundt om Jorden, som stod stille i universets centrum (Ptolemaios’ verdensbillede var altså geocentrisk). Ptolemaios´ antagelser er, at planeterne bevæger sig i jævne cirkelbevægelser rundt om Solen (i ekliptikas plan), som også selv bevæger sig i en jævn cirkelbevægelse rundt om Jorden.

Men cirkelbevægelserne rundt om Jorden passede dårligt med de astronomiske målinger, så derfor lod Ptolemaios planeterne bevæge sig på en lille cirkel, der kaldes en epicykel. Den lille cirkels centrum *C* lod Ptolemaios så udføre en jævn cirkelbevægelse rundt om Jorden. Dermed havde han fundet en model, der rent faktisk kunne forklare de retrograde bevægelser!



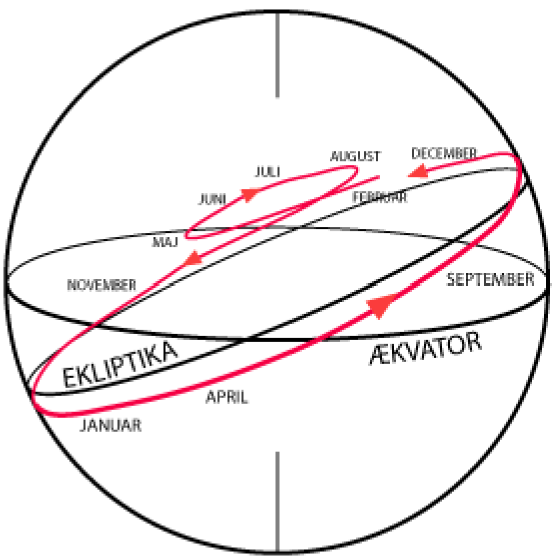
En forenklet model af Ptolemaios’ palnet model ses til venstre.

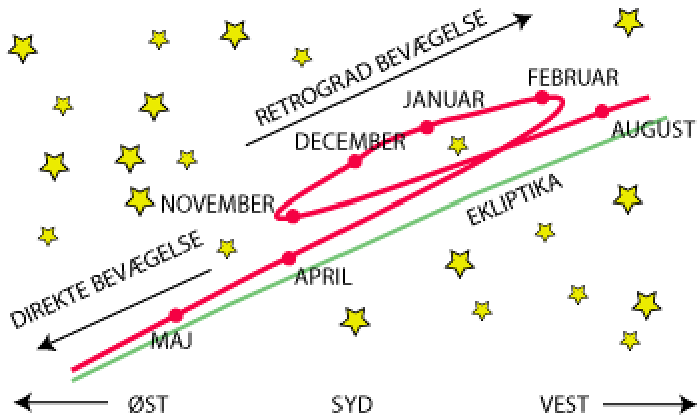
Til højre ses Ptolemaios model for Mars’ bane rundt om jorden. Bemærk at jorden er forskudt lidt væk fra deferentens centrum, for at få modellen til at stemme overens med de astronomiske observationer.



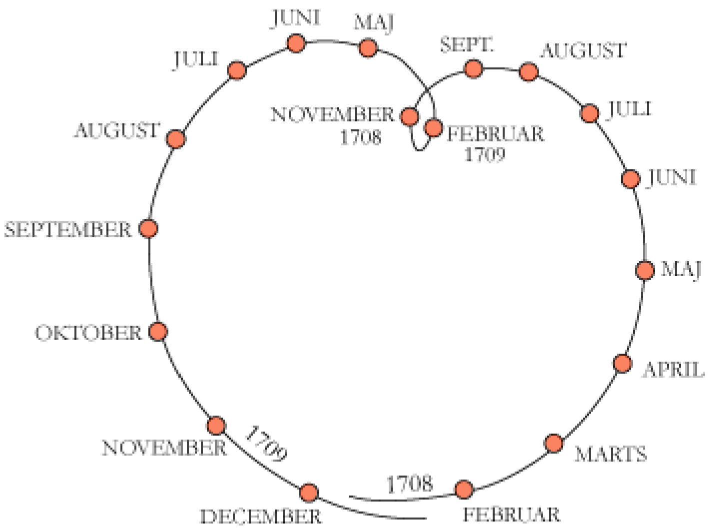
Figuren nedenfor viser fx Mars’ bane observeret over en periode på ca. 2 år fra februar 1708 til november 1709. Her ses Mars’ retrograde bevægelse, som fandt sted i perioden november til februar.

ISBN 9788770668279





Nedenfor ses en plan gengivelse af Mars' bane beskrevet ovenfor. Ptolemaios beskrev faktisk Mars' bane, som en kompliceret epicykel-lignende kurve, som stemte overens med de astronomiske observationer (med den nøjagtighed, man kunne opnå på hans tid).



Epicykelteorien vandt stor tilslutning bl.a. fordi den kunne bruges til at forudsige planetpositioner med god nøjagtighed i forhold til de astronomiske observationer.

Det kan virke naivt, når Ptolemaios sådan bare postulerer, at Jorden er i universets centrum, og at alle planeterne bevæger sig i jævne cirkelbevægelser. Men han bruger stort set den samme metode som videnskabsmænd bruger den dag i dag: Man observerer, hvad der foregår i naturen, og ud fra disse observationer prøver man at opstille en model, der kan forklare og forudsige naturens opførsel (fx planeternes bevægelse) med tilfredsstillende nøjagtighed. Ved at bruge ca. 80 epicykler kunne Ptolemaios forklare bevægelsen af Solen, Månen samt de fem planeter, og systemet forblev det kosmologiske grundlag, indtil Kopernikus' heliocentriske system vandt udbredelse i 1600-tallet.

I alle kulturer har tabeller været uundværlige hjælpemidler. Også Ptolemaios havde hårdt brug for tabeller i forbindelse med sine astronomiske beregninger. Tabellerne gjorde, at han kunne spare tid og reducere fejlkilder. Desuden gjorde en tabel det muligt for ham at uddelegere noget af det tunge beregningsarbejde til sine assistenter. I næsten 2000 år efter Ptolemaios har matematikere betjent sig af sådanne trigonometriske tabeller til beregning af sider og vinkler. Tabellerne er nu lagt ind i de matematiske værktøjsprogrammer.

ISBN 9788770668279

Ptolemaios' kordetabel – Hvad fortæller den?

Da Ptolemaios opdagede de sammenhænge mellem sider og vinkler, der blev grundlaget for trigonometrien, begyndte han at udarbejde de første trigonometriske tabeller. Tabellerne blev beregnet i 60 talsystemet (se evt. kapitel 7: *Tal og ligninger*), fordi det var det bedste talsystem på den tid til at regne med brøker. Nedenfor ses et udsnit af hans såkaldte kordetabel skrevet med græske bogstaver samt en transskribering til vores tal. Denne tabel er forløberen for senere tiders sinustabeller.

Κανόνιον τῶν ἐν κύκλῳ εὐθειῶν			Table of Chords		
περιφερειῶν	εὐθειῶν	ἑξηκοστῶν	arcs	chords	sixtieths
∠′	ō λα κε	ō α β ν	½°	0;31,25	0;1,2,50
α	α β ν	ō α β ν	1°	1;2,50	0;1,2,50
α∠′	α λδ ιε	ō α β ν	1½°	1;34,15	0;1,2,50
β	β ε μ	ō α β ν	2°	2;5,40	0;1,2,50
β∠′	β λζ δ	ō α β μη	2½°	2;37,4	0;1,2,48
γ	γ η κη	ō α β μη	3°	3;8,28	0;1,2,48
γ∠′	γ λθ νβ	ō α β μη	3½°	3;39,52	0;1,2,48
δ	δ ια ις	ō α β μζ	4°	4;11,16	0;1,2,47
δ∠′	δ μβ μ	ō α β μζ	4½°	4;42,40	0;1,2,47
ε	ε ιδ δ	ō α β μς	5°	5;14,4	0;1,2,46
ε∠′	ε με κζ	ō α β με	5½°	5;45,27	0;1,2,45
ς	ς ις μθ	ō α β μδ	6°	6;16,49	0;1,2,44
ς∠′	ς μη ια	ō α β μγ	6½°	6;48,11	0;1,2,43
ζ	ζ ιθ λγ	ō α β μβ	7°	7;19,33	0;1,2,42
ζ∠′	ζ ν νδ	ō α β μα	7½°	7;50,54	0;1,2,41
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
ροδ∠′	ριθ να μγ	ō ō β νγ	174½°	119;51,43	0;0,2,53
ροε	ριθ νγ ι	ō ō β λς	175°	119;53,10	0;0,2,36
ροε∠′	ριθ νδ κζ	ō ō β κ	175½°	119;54,27	0;0,2,20
ρος	ριθ νε λη	ō ō β γ	176°	119;55,38	0;0,2,3
ρος∠′	ριθ νς λθ	ō ō α μζ	176½°	119;56,39	0;0,1,47
ροζ	ριθ νζ λβ	ō ō α λ	177°	119;57,32	0;0,1,30
ροζ∠′	ριθ νη ιη	ō ō α ιδ	177½°	119;58,18	0;0,1,14
ροη	ριθ νη νε	ō ō ō νζ	178°	119;58,55	0;0,0,57
ροη∠′	ριθ νθ κδ	ō ō ō μα	178½°	119;59,24	0;0,0,41
ροθ	ριθ νθ μδ	ō ō ō κε	179°	119;59,44	0;0,0,25
ροθ∠′	ριθ νθ νς	ō ō ō θ	179½°	119;59,56	0;0,0,9
ρπ	ρκ ō ō	ō ō ō ō	180°	120;0,0	0;0,0,0

ISBN 9788770668279

Øvelse 1:
Tabellen kan oversættes til vores tal ved hjælp af nedenstående oversigt over de enkelte bogstavers tal-betydning samt tegnet  , som betyder $\frac{1}{2}°$. Tegnet fungerer også som en form for vinkelmarkering, hvor vi i dag skriver Ð .

Α	α	1	Ι	ι	10	Ρ	ρ	100	,α		1000
Β	β	2	Κ	κ	20	Σ	σ	200	,β		2000
Γ	γ	3	Λ	λ	30	Τ	τ	300	,γ		3000
Δ	δ	4	Μ	μ	40	Υ	υ	400	,δ		4000
Ε	ε	5	Ν	ν	50	Φ	φ	500	,ε		5000
F	ϛ	6	Ξ	ξ	60	Χ	χ	600	,ϛ		6000
Ζ	ζ	7	Ο	ο	70	Ψ	ψ	700	,ζ		7000
Η	η	8	Π	π	80	Ω	ω	800	,η		8000
Θ	θ	9	Q	ϙ	90	ϡ	ϡ	900	,θ		9000

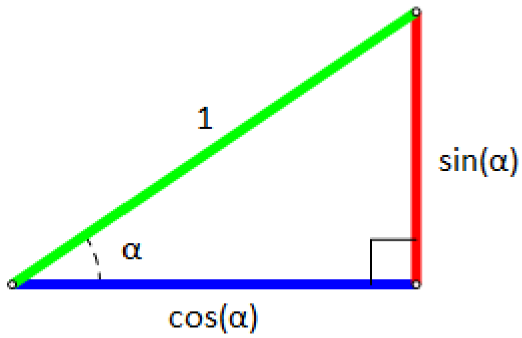
ō, ō &c: 0

a) Tjek ved hjælp af tabellen transskriberingen ovenfor fx ved $3°$ og $177°$.

Ptolemaios behandler trigonometrien i Bog 1 kapitel 10 og 11 i "Almagest", hvor kapitel 11 kun består af kordetabellen ovenfor, mens kapitel 10 er en forklaring på, hvordan han er kommet frem til tabellen.

Vi vil først prøve at forstå tabellens oplysninger, og hvordan man bruger den, for derefter i næste afsnit at gå dybere ned i, hvordan den er fremkommet.

Ptolemaios definerer, som vi så det i kapitel 3: *Geometri – Konstruktion og beregning*, sinus og cosinus ud fra den retvinklede trekant, hvor længden af hypotenusen er 1.



Dette gælder naturligvis kun for vinkler α , der er mellem $0°$ og $90°$, men det er også tilstrækkeligt her.

Øvelse 2:
Hvad er $\sin(30°)$? Hvad er $\sin(150°)$? Hvorfor er det nok, at se på vinkler mellem $0°$ og $90°$ for at konstruere Ptolemaios kordetabel?

Ifølge Pythagoras' sætning er de to funktioner afhængige, idet der gælder, at $(\sin(\alpha))^2 + (\cos(\alpha))^2 = 1$.

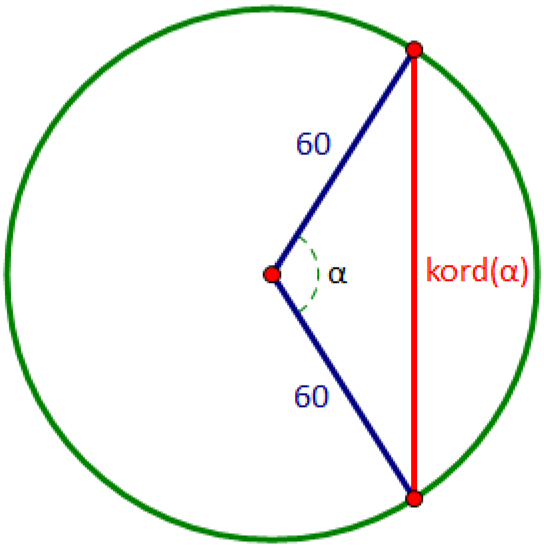
Bemærk: Dette skrives ofte med en anden notation: $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$, for at undgå at man kommer i tvivl om, om det er α , der skal sættes i anden, eller det er hele $\sin(\alpha)$ der skal sættes i anden.

ISBN 9788770668279

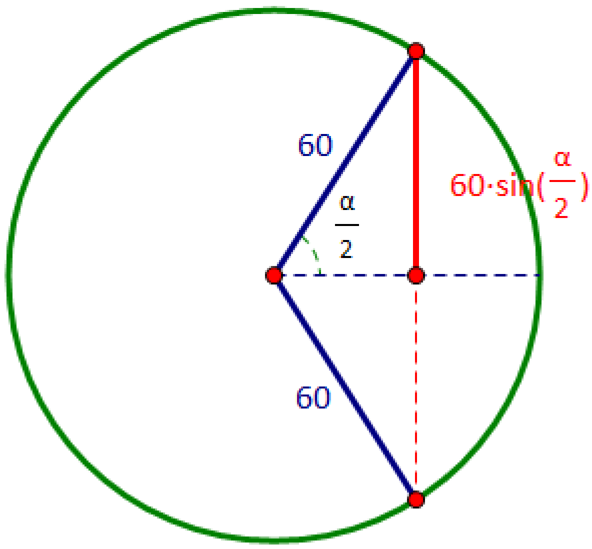
Øvelse 3:
Benyt Pythagoras' sætning til at eftervise, at $\sin^2(\alpha)+\cos^2(\alpha)=1$.

Ptolemaios tabel indeholder jo ikke sinus og cosinus, men i stedet en funktion, som kaldes en *kordefunktion*, som vi vil betegne $kord(\alpha)$. Den defineres som:

$\text{kord}(\alpha)$ *er længden af korden svarende til en bue på* α *grader i en cirkel, hvis radius er 60.*



Kordefunktionen: $\text{kord}(\alpha)$



Sammenhængen mellem kordefunktionen og sinusfunktionen:

$$\frac{1}{2}\cdot\text{kord}(\alpha)=60\cdot\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\text{kord}(\alpha)=120\cdot\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

Tabellen angiver længden af korder, som spænder over vinkler fra $\frac{1}{2}^\circ$ til 180° i skridt på $\frac{1}{2}^\circ$, og kordelængderne er angivet i de babylonske 60-talsystemet, som var det talsystem på hans tid, der bedst egnede sig til regning med brøker.
Dvs. når Ptolemaios i tabellen angiver, at

$$\text{kord}(4\tfrac{1}{2}^\circ)=4;42,40$$

så betyder det i vores 10-tals-system, at

$$\text{kord}(4\tfrac{1}{2}^\circ)=4\cdot 60^0+42\cdot 60^{-1}+40\cdot 60^{-2}$$

$$\text{kord}(4\tfrac{1}{2}^\circ)=4\cdot 1+42\cdot\frac{1}{60}+40\cdot\frac{1}{60^2}$$

$$\text{kord}(4\tfrac{1}{2}^\circ)=4+\frac{42}{60}+\frac{40}{3600}$$

$$\text{kord}(4\tfrac{1}{2}^\circ)=4+0{,}7+0{,}011$$

$$\text{kord}(4\tfrac{1}{2}^\circ)=4{,}711$$

Målt med en enhed, der er $\frac{1}{60}$ af cirklens radius.

ISBN 9788770668279

Øvelse 4:
Forklar beregningerne ovenfor, og udregn selv kordelængden for buerne svarende til $\alpha = 6°$ og for $\alpha = 7{,}5°$.

Tredje kolonne i tabellen har overskriften "Tresindstyvedele". Tallene i denne kolonne anvendes til at bestemme $\text{kord}(\alpha)$ for vinkler, der ligger mellem to af de i første kolonne angivne vinkler. Metoden kaldes *interpolation*, som er omtalt i kapitel 6: *Logaritmer*. Interpolation betyder, at man ud fra kendte værdier i en tabel beregner værdier, som man ikke direkte kan aflæse af tabellen.
Tresindstyvedele betyder i denne sammenhæng $\frac{1}{60}°$, hvilket netop svarer til $1'$ (bueminut). Dette beregnes som $\frac{1}{30}$ af springet fra linje til linje i vinkelkolonnen i tabellen, altså $\frac{1}{30}$ af $\frac{1}{2}°$ dvs. $\frac{1}{30} \cdot \frac{1}{2}° = \frac{1}{60}°$.

Øvelse 5:
Hvis vi fx vil finde $\text{kord}(4°32')$, så kan vi jo ikke umiddelbart aflæse det tal i tabellen, og vi må derfor benytte interpolation ved hjælp af den tredje kolonne.
Først overvejer vi, at $4°32' = 4{,}5° + 2'$, dvs. vi skal bruge korden svarende til $4{,}5°$ plus det ekstra som de 2 bueminutter giver ifølge tresindstyvedele-kolonnen. Ifølge tabellen er $\text{kord}(4{,}5°) = 4;42{,}40$. Da $1'$ ifølge tresindstyvedele-kolonnen i intervallet fra $4\frac{1}{2}°$ til $5°$ svarer til $0;1{,}2{,}47$, så kan vi beregne kordens længde svarende til vinklen $\alpha = 4°32'$ til:

$$4;42{,}40 \; + \; 2 \cdot (0;1{,}2{,}47) = 4;42{,}40 \; + \; 0;2{,}5{,}34 = 4;44{,}45{,}34$$

hvilket i 10-talssystemet svarer til $4{,}74599$.

a) Tjek beregningerne ovenfor og gør rede for at $4;44{,}45{,}34$ i 60-talssystemet er det samme som $4{,}74599$ i 10-talssystemet.
Vink: Lav fx din egen omregner, idet du opstiller et udtryk svarende til:
$$tal_{10} = s_0 \cdot 60^0 + s_1 \cdot 60^{-1} + s_2 \cdot 60^{-2} + s_3 \cdot 60^{-3}$$
hvor du så blot skal indtaste værdierne for s_0, s_1, s_2 og s_3, som i ovenstående tilfælde er $s_0 = 4,\ s_1 = 44,\ s_2 = 45,\ s_3 = 34$.

b) Bestem selv ved interpolation $\text{kord}(7°34')$.

c) Sammenlign de fundne kordelængder med kordelængder, som du kan bestemme med et moderne værktøj, idet du udnytter, at $\text{kord}(\alpha) = 120 \cdot \sin(\frac{\alpha}{2})$.

Man kan naturligvis også bruge tabellen omvendt, dvs. finde vinklen α, hvis vi kender $\text{kord}(\alpha)$, idet vi så skal gå baglæns ind i tabellen.

Øvelse 6:

a) Bestem den vinkel α, der svarer til kordelængden $7;19{,}33$, og omregn kordelængden til 10-talssystemet.

b) Bestem den vinkel α, der svarer til kordelængden $2;5{,}40{,}0 + 3 \cdot 0;1{,}2{,}50 = 2;8{,}48{,}30$, og omregn kordelængden til 10-talssystemet.

ISBN 9788770668279

Hvordan anvendes kordetabellen?

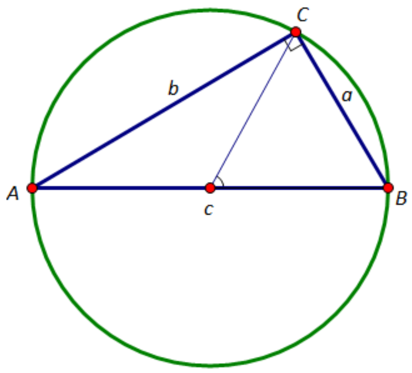
Med disse to operationer *at regne frem og tilbage* ved hjælp af kordetabellen kunne Ptolemaios udføre mange af de trigonometriske beregninger, han havde brug for. Mange geometriske problemer kan nemlig løses ved at regne på trekanter, dvs. bestemmer sider og vinkler i trekanter (fx som ved triangulering).

Ptolemaios laver ikke en samlet fremstilling af, hvordan han løser trigonometriske problemer, men samles de spredte passager i "Almagest", så finder man løsninger på mindst fem forskellige problemtyper, som vi behandler nedenfor:

I. Den retvinklede trekant.
II. Trekanter, hvor en vinkel og dens to hosliggende sider er kendte.
III. Trekanter, hvor to vinkler og en ikke mellemliggende side er kendt.
IV. Trekanter, hvor en vinkel og dens hosliggende samt dens modstående side er kendte.
V. Trekanter, hvor alle tre sider er kendte.

I. Den retvinklede trekant:

Hvis vi kan bestemme sider og vinkler (samlet kaldes disse trekantens *stykker*) i retvinklede trekanter, så kan vi bruge dette til at bestemme stykkerne i en vilkårlig trekant, fordi denne jo kan opdeles i to retvinklede trekanter. Derfor er løsning af denne kategori af problemer grundlaget for løsning af alle andre.
Konstruer en retvinklet trekant samt dens omskrevne cirkel, idet centrum for den omskrevne cirkel ligger i hypotenusens midtpunkt, fordi hypotenusen bliver diameter i cirklen.



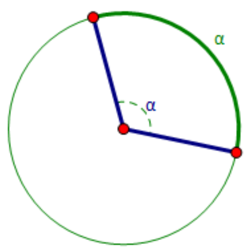
Vi minder om nogle resultater fra Euklid:

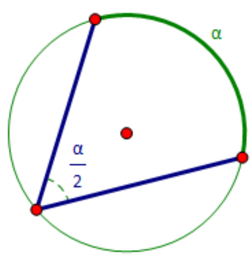
Definitioner:

- En centervinkel er en vinkel med toppunkt i cirklens centrum og begge ben som cirkelradier.
- En periferivinkel er en vinkel med toppunkt på cirkelperiferien og begge ben som korder i cirklen.

Sætninger:

- En centervinkel er lige så stor som den bue den spænder over.
- En periferivinkel er halt så stor som den bue den spænder over.

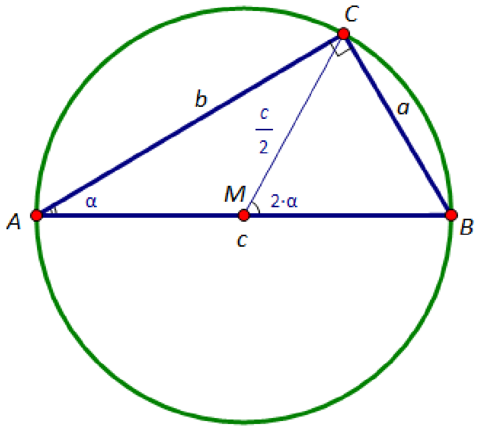




ISBN 9788770668279

Øvelse 7:

Argumentér, ved hjælp af ovenstående resultater fra Euklid, for at vinkler og sider kan bestemmes som vist på figuren, idet vinkel A sættes til α :



Antag nu, at diameteren i cirklen er 120, dvs. radius er 60, så vil korden CB have længden $\text{kord}(2\cdot\alpha)$, dvs.

$$\frac{\text{kord}(2\cdot\alpha)}{120}=\frac{a}{c}$$

Hvis så to af stykkerne α, a og c er kendt, så kan vi altså finde det tredje.

Øvelse 8:

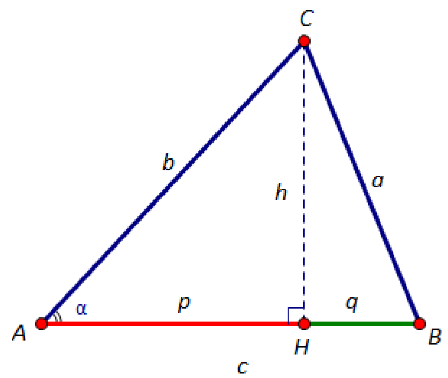
a) Hvordan bestemmes vinkel B, som vi her kalder β ?

b) Hvordan bestemmes den sidste side b i trekanten, når vi kender a og c ?

Således kan vi ved hjælp af kordetabellen bestemme alle stykker i den retvinklede trekant, hvis vi kender en vinkel og en side eller to sider, hvoraf den ene er hypotenusen.

II. Trekanter, hvor en vinkel og dens to hosliggende sider er kendte.

Konstruer en model af trekanten og nedfæld højden h fra vinkel C, som vist på figuren, og kald fodpunktet for højden for H :



I den retvinklede trekant AHC kender vi sidelængden b og vinkel A, som vi kalder α .

ISBN 9788770668279

Øvelse 9:

a) Argumenter for, at vi således også ved hjælp af kordetabellen kan bestemme h, p og vinkel C i trekant AHC.

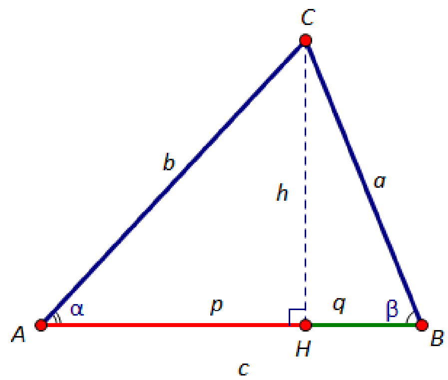
b) Argumenter videre for, at vi derefter kan bestemme q, og dermed c.

c) Vi kender nu to sider i trekant BHC. Argumenter for at vi således ved hjælp af kordetabellen kan bestemme a og vinkel C samt vinkel B i trekant AHC.

d) Hvordan bestemme vinkel C i trekant ABC?

III. Trekanter, hvor to vinkler og en ikke mellemliggende side er kendt.

Antag, at vi kender vinkel A, som vi kalder α og vinkel B, som vi kalder β samt siden b. Konstruer en model af trekanten, og inddel den igen i to retvinklede trekanter, som her:



Øvelse 10:

a) Hvordan bestemmes vinkel C, som vi her kalder γ?

b) Hvilke stykker kender vi den retvinklede trekant AHC? Kan vi så bestemme resten?

c) Hvilke stykker kender vi den retvinklede trekant BHC? Kan vi så bestemme resten?

d) Hvordan bestemmes siden c i trekant ABC?

IV. Trekanter, hvor en vinkel og dens hosliggende samt dens modstående side er kendte.

Antag, at vi kender vinkel A, som vi kalder α samt siderne a og b. Konstruer en model af trekanten, og opdel den igen som ovenfor i to retvinklede trekanter ved hjælp af højden fra C.

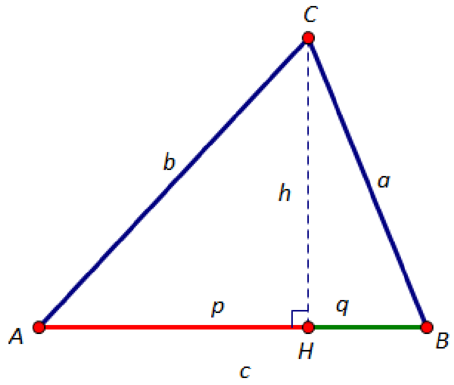
Øvelse 11:

Argumenter som ovenfor for bestemmelse af alle sider og vinkler i trekant ABC.

ISBN 9788770668279

V. Trekanter, hvor alle tre sider er kendte.

Denne problemtype er lidt speciel for Ptolemaios, fordi han i sine astronomiske observationer stort set altid kender mindst en vinkel. Dog finder man i Bog IV en passage, der omhandler formørkelser, hvor han netop må løse et problem af den karakter.
Konstruer en model af trekanten, og opdel den igen som ovenfor i to retvinklede trekanter ved hjælp af højden fra C, som vist nedenfor:



Hvis vi så kan bestemme p og q, så kender vi to sider i hver af de to retvinklede trekanter, og dermed kan vi ved hjælp af kordetabellen bestemme vinkel A og vinkel B, og derefter vinkel C – hvordan?
Vi skal altså bestemme p og q.

Øvelse 12:
Opskriv sammenhængen mellem p, q og c.
Vis ved hjælp af Pythagoras' sætning, at der gælder:

$$h^2 = b^2 - p^2 \quad \text{og} \quad h^2 = a^2 - q^2$$

og vis ved hjælp heraf, at

$$p^2 - q^2 = b^2 - a^2$$

Vis nu ved hjælp af en kvadratsætning, at der også gælder:

$$p^2 - q^2 = c \cdot (p - q)$$

og benyt dette til at vise, at

$$p - q = \frac{b^2 - a^2}{c}$$

Da vi kender alle tre sider a, b og c, så kan vi altså beregne $p - q$. Desuden ved vi, at $p + q = c$, så derfor kan vi nu bestemme, som var det der var nødvendigt for at kunne bestemme alle stykker i trekant ABC!

Vi har altså set, at i de fem angivne tilfælde kan alle trekantens stykker bestemmes ved hjælp af kordetabellen, idet vi benytter

$$\frac{\text{kord}(2 \cdot \alpha)}{120} = \frac{a}{c}$$

i den retvinklede trekant. Dvs. vi slår $\text{kord}(2 \cdot \alpha)$ op i tabellen, og derefter dividerer vi med 120. Men at dividere med 120 svarer jo til først at halvere og derefter dividere med 60, og at dividere med 60 i 60-talssystemet er jo nemt, fordi det svarer bare til at flytte semikolonet en plads til venstre! Rent praktiskskal vi altså finde *den halve korde til den dobbelte bue*, fordi så er resten bare et spørgsmål om af flytte kommaer! Denne operation skal, som vi så ovenfor, ofte anvendes, og det vil derfor være meget praktisk, at have en tabel, der netop foretager denne beregning – dvs. en sinustabel!

ISBN 9788770668279

Øvelse 13:

a) Forklar ved hjælp af figuren anvendt ovenfor, at beregning af *den halve korde til den dobbelte bue* netop svarer til en sinustabel.

b) Konstruer en sinustabel (fx i et regneark) til den halve vinkel i kordetabellen fra $0°$ til $5°$:

1) Opret en tabel i et regneark, og indskriv vinklerne fra $0°$ til $5°$ i den første kolonne.
2) anden kolonne skrives de tilsvarende kordelængder – omskrevet til 10-talssystemet (brug din omregner) med 5 decimalers nøjagtighed.
3) I tredje kolonne angives værdierne for sinus (fast med 5 decimaler) til den halve vinkel, som beregnes via en omskrivning af $\text{kord}(\alpha) = 120 \cdot \sin(\frac{\alpha}{2})$:

A vinkel	B korde	C sin_halv_vinkel
		=korde/120
0.50000	0.52361	0.00436
1	1.04722	0.00873
1.50000	1.57083	0.01309

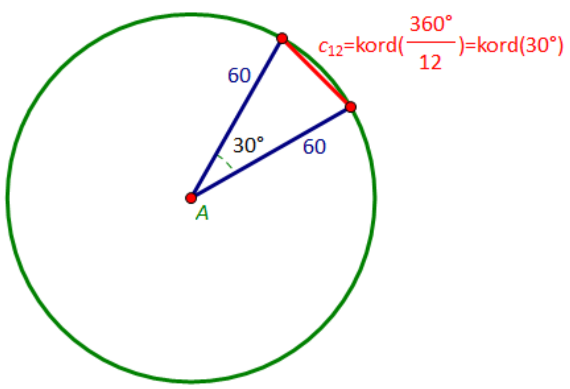
c) Benyt din tabel til at udregne sinus til $2°$, og til at bestemme den vinkel, hvis sinus er $0{,}04362$.

Hvordan er kordetabellen konstrueret?

Ptolemaios' udgangspunkt var jo som nævnt en cirkel med radius 60. I det følgende vil vi betegne en korde svarende til $\frac{1}{n}$ af cirklen med c_n.

Længden af c_n kan da beregnes ved: $c_n = \text{kord}(\frac{360°}{n})$.

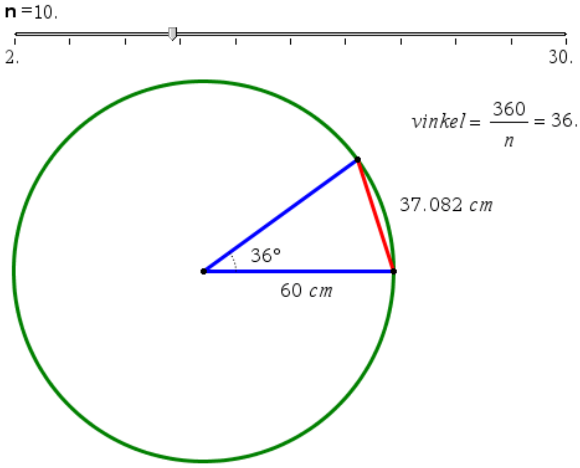
Dvs. for $n = 12$ finder vi $c_{12} = \text{kord}(30°)$.



L&R Uddannelse EGMONT

Øvelse 14:

a) Konstruer en dynamisk model, hvor du kan lade n antage forskellige værdier (fx med en skyder), således at modellen automatisk viser den tilhørende korde og beregner vinklen svarende til korden:



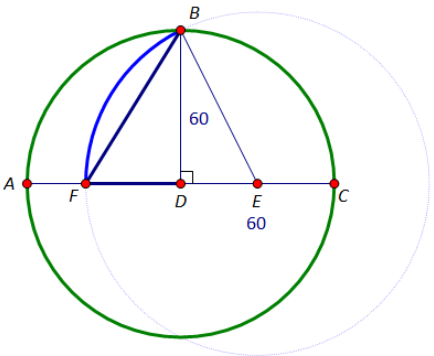
b) Bestem længden af korderne svarende til $n = 18$, $n = 9$ og $n = 6$.

c) Hvordan kan man beregne kordelængden, når $n = 2$? Og når $n = 4$?

Øvelse 15:

Konstruer nu en ny cirkel med radius 60 og med betegnelser som på figuren nedenfor:

- D er centrum i cirklen
- BD er vinkelret på AC
- E halverer DC
- F er skæringspunkt mellem AC og cirklen med centrum i E og radius EB



Ptolemaios' påstår nu, at $DF = c_{10}$ og $BF = c_5$. Her henviser han Euklids konstruktion af den regulære femkant, hvor netop DF konstrueres, og det vises, at DF netop svarer til sidelængden i den regulære 10-kant. Endvidere henviser han til Euklid Bog XIII sætning 10:

> *Siderne i den regulære 5-kant, 6-kant og 10-kant, hvor de alle er indskrevne i samme cirkel, danner en retvinklet trekant.*

Da 5-kantens sidelængde er størst, gælder der ifølge Pythagoras' sætning

$$c_5^{\ 2} = c_6^{\ 2} + c_{10}^{\ 2}$$

hvor $c_6 = r = 60$, og ved hjælp af Pythagoras' sætning anvendt på trekant FDB må får vi netop $BF = c_5$.

ISBN 9788770668279

L&R Uddannelse EGMONT

Øvelse 16:
Overvej, hvorfor $c_6 = r = 60$, og vis ved beregning at Pythagoras' sætning anvendt på trekant FDB giver, at $BF = c_5$.

Ptolemaios går nu over til at beregne c_{10} og c_5.

Øvelse 17: *Bestemmelse af* c_{10} *og dermed* $\text{kord}(36°)$

a) Gør rede for, at $DE = 30$ og $DB = 60$, idet radius i cirklen er 60.

b) Vis, at $EB = \sqrt{4500} = 67{,}08204$, og benyt din omregner til at vise, at dette skrevet i 60-talssytemet er $67;4,5$.[1]

c) Gør rede for, at så er $c_{10} = FD = 37;4{,}55 = 37{,}08194$.

d) Gør rede for, at vi således har bestemt $\text{kord}(36°)$, idet du husker at c_{10} er sidelængden i den regulære 10-kant.

Øvelse 18: *Bestemmelse af* c_5 *og dermed* $\text{kord}(72°)$
Vi ved nu, at $FD = 37;4{,}55 = 37{,}08194$.

a) Bestem FD^2 og DB^2, og benyt Pythagoras' sætning til at vise, at $BF = 70{,}53417 = 70;32{,}3$. Benyt din omregner til at vise, at det sidste lighedstegn gælder.

b) Gør rede for, at vi nu har vist, at $\text{kord}(72°) = 70;32{,}3$.

Vi har nu fundet to værdier til tabellen!

Øvelse 19: *Bestemmelse af* c_6 *og dermed* $\text{kord}(60°)$
Gør rede for, at $\text{kord}(60°) = 60$, idet du husker, at c_6 er sidelængden i den regulære 6-kant.
Vink: Gå tilbage til din dynamiske beregning af kordelængder, og sæt $n = 6$, og læg mærke hvilken type trekant, der fremkommer.

Nu har vi tre værdier!

Øvelse 20: *Bestemmelse af* c_4 *og dermed* $\text{kord}(90°)$
Gør rede for, at $\text{kord}(90°) = \sqrt{7200} = 84{,}85278 = 84;51{,}10$, idet du husker, at c_4 er sidelængden i den regulære 4-kant, dvs. kvadratet. Benyt din omregner til at vise, at det sidste lighedstegn gælder.
Vink: Gå tilbage til din dynamiske beregning af kordelængder, og sæt $n = 4$, og læg mærke hvilken type trekant, der fremkommer.

Nu har vi fire værdier!

---

[1] Ptolemaios tager det for givet, at man kan uddrage kvadratrødder, og han benytter også den samme værdi for $\sqrt{2}$, som man fandt på den gamle babylonske lertavle omtalt i øvelse 3.39, hvor resultatet af beregningen: $\sqrt{30^2 + 30^2} = \sqrt{2 \cdot 30^2} = \sqrt{2} \cdot 30 = 42;25{,}35$ er angivet sammen med tallet $1;24{,}51{,}10$, som netop viser sig at være $\sqrt{2} = 1{,}41421$, hvilket svarer fint til den moderne værdi.

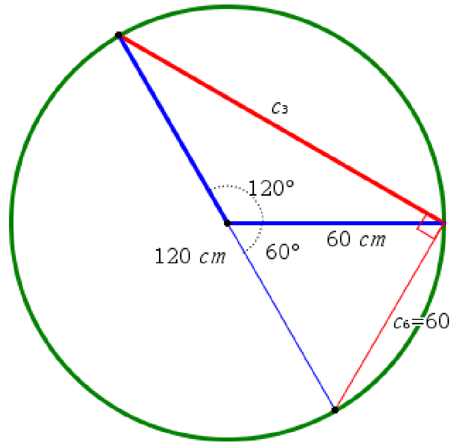
ISBN 9788770668279

Øvelse 21: *Bestemmelse af* c_3 *og dermed* kord(120°)

Gør ved hjælp af figuren redefor, at $c_3^2 + r^2 = (2 \cdot r)^2$.

Vink: Konstruer selv figuren. Gå tilbage til din dynamiske beregning af kordelængder, og sæt $n = 3$. Konstruer nu (oveni denne figur) den retvinklede trekant:

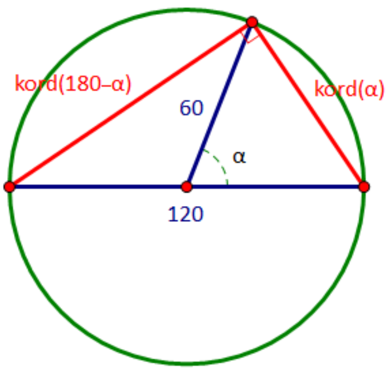
- Konstruer diameteren i cirklen ved at forlænge det ene vinkelben til skæring med cirklen
- Konstruer korden mellem dette skæringspunkt og skæringspunktet mellem cirklen og det andet vinkelben.



Gør rede for, at så er $\text{kord}(120°) = \sqrt{10800} = 103{,}92305 = 103;55,23$. Benyt din omregner til at vise, at det sidste lighedstegn gælder.

Nu har vi fem værdier!

Men hvis man kender en given bues korde, så kan man også finde supplementbuens korde, idet vi anvender Pythagoras' sætning på den retvinklede trekant i figuren nedenfor:



$$\text{kord}^2(180 - \alpha) + \text{kord}^2(\alpha) = (2 \cdot r)^2$$
$$\text{kord}^2(180 - \alpha) + \text{kord}^2(\alpha) = 120^2$$
$$\text{kord}^2(180 - \alpha) = 120^2 - \text{kord}^2(\alpha)$$
$$\text{kord}(180 - \alpha) = \sqrt{120^2 - \text{kord}^2(\alpha)} = \sqrt{14400 - \text{kord}^2(\alpha)}$$

Dette illustrerer Ptolemaios ved beregning af kord(144°).

Øvelse 22:

Benyt ligesom Ptolemaios formlen ovenfor til at beregne, at $\text{kord}(144°) = 114{,}12678 = 114;7,37$, idet du allerede kender kord(36°). Benyt din omregner til at vise, at det sidste lighedstegn gælder.

Denne lille omskrivning giver os så alle supplementvinklerne til de vinkler vi allerede har bestemt – dvs:

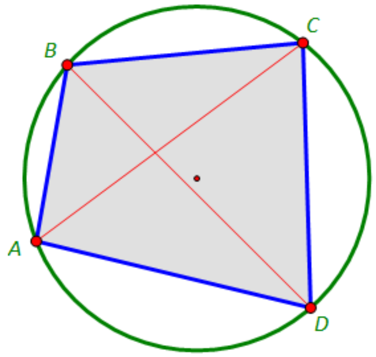
Nu har vi ti værdier!

ISBN 9788770668279

Ptolemaios sætning

Resten af værdierne finder Ptolemaios ved hjælp af en sætning, som vi i dag kender som *Ptolemaios' sætning*, og den siger:
Hvis ABCD er en firkant indskrevet i en cirkel, så er produktet af diagonalerne lig med summen af produkterne af hvert par af modstående sider, dvs.

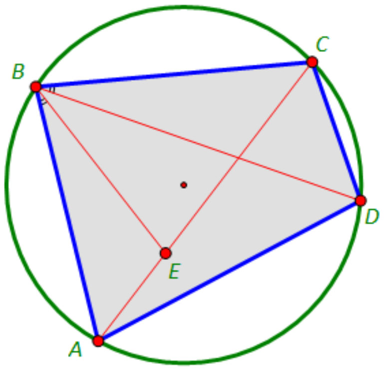
$$AC \times BD = AB \times CD + AD \times BC$$



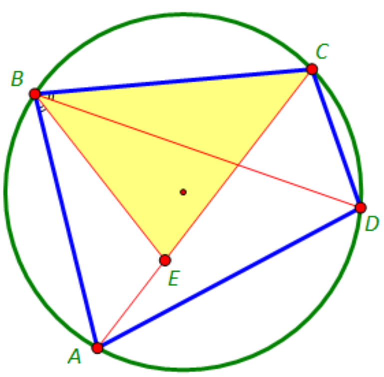
Øvelse 23:

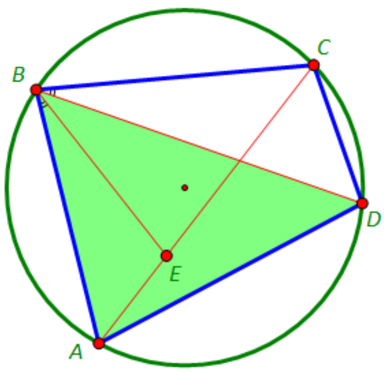
a) Konstruer figuren i dit dynamiske geometriprogram, og opstil beregninger knyttet til den dynamiske figur, hvor du beregner hhv. venstre side og højre side af lighedstegnet i sætningen.
b) Undersøg, om Ptolemaios´ sætning ser ud til at holde, idet du deformerer figuren ved at trækker i den, og samtidigt holder øje med om de to beregninger forbliver ens.

Bevis for Ptolemaios sætning:
Konstruer et punkt E på diagonalen AC, således at $\angle ABE = \angle DBC$:



Der må så gælde, at $\angle CBE = \angle ABD$.
Vi ser endvidere, at $\angle BCA = \angle BDA$, fordi de er periferivinkler og spænder over den samme bue.
Dermed ved vi, at trekant BCE og trekant DBC er ensvinklede!





ISBN 9788770668279

Derfor gælder der, at

$$\frac{BC}{CE} = \frac{BD}{AD}$$

$$BC \cdot AD = BD \cdot CE$$

På samme måde kan man vise, at trekant BAE og trekant BDC er ensvinklede, hvorfor der også gælder, at

$$\frac{AB}{BD} = \frac{AE}{CD}$$

$$AB \cdot CD = AE \cdot BD$$

Hvis så lægger de fundne to udtryk sammen får vi

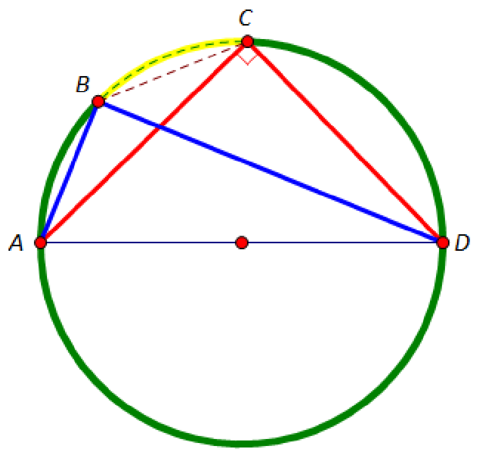
$$AB \cdot CD + BC \cdot AD = AE \cdot BD + BD \cdot CE$$

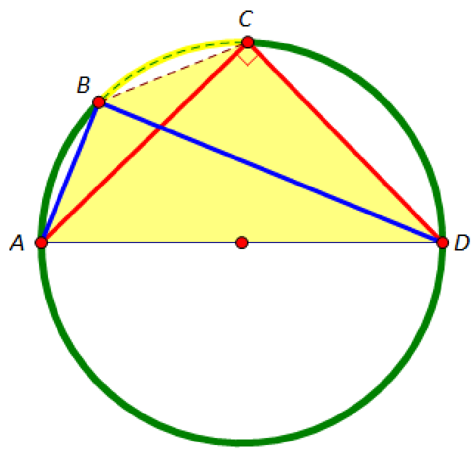
$$AB \cdot CD + BC \cdot AD = BD \cdot (AE + CE)$$

$$AB \cdot CD + BC \cdot AD = BD \cdot AC$$

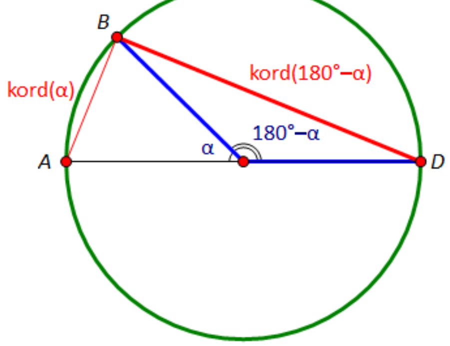
som jo netop er Ptolemaios' sætning!

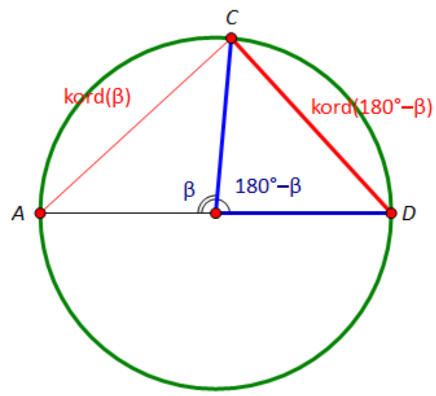
Ptolemaios viser nu, at hvis man kender to buer og deres korder, så kan man nemt beregne korden svarende til forskellen mellem to buer – fx buen BC – ud fra Ptolemaios' sætning.





Her antager Ptolemaios, at korderne AB og AC er kendte, og han vil så bestemme korden BC.
Korderne BD og CD beregnes ud fra de kendte korder ved hjælp af formlen for supplementvinkler – se figurer nedenfor.





Vi har således bestemt siderne AB, CD og diagonalerne BD og AC. Desuden ved vi at diameteren er $AD = 120$.

ISBN 9788770668279

Herefter giver Ptolemaios' sætning:

$$AB \cdot CD + BC \cdot AD = BD \cdot AC$$
$$AB \cdot CD + BC \cdot 120 = BD \cdot AC$$
$$120 \cdot BC = BD \cdot AC - AB \cdot CD$$

hvor hele højresiden er kendt, dvs. man får altså et simpelt udtryk for BC ved brug af Ptolemaios sætning.

Anvender vi betegnelserne α og β, som ovenfor, så får vi venstresiden til

$$120 \cdot BC = 120 \cdot \text{kord}(\beta - \alpha)$$

og højresiden til

$$BD \cdot AC - AB \cdot CD = \text{kord}(180° - \alpha) \cdot \text{kord}(\beta) - \text{kord}(\alpha) \cdot \text{kord}(180° - \beta)$$

Sammensættes disse beregninger fås

$$120 \cdot \text{kord}(\beta - \alpha) = \text{kord}(180° - \alpha) \cdot \text{kord}(\beta) - \text{kord}(\alpha) \cdot \text{kord}(180° - \beta)$$

Altså kan korden svarende til forskellen mellem to vinkler nemt beregnes, når vi kender de to vinklers korder.

Øvelse 24:
Udregn som Ptolemaios gjorde det $\text{kord}(12°)$ ud fra $\text{kord}(72°)$ og $\text{kord}(60°)$, som jo allerede er beregnet.

Nu har vi så mange flere værdier i tabellen!

Herefter viser Ptolemaios, at man ud fra en given vinkels korde kan bestemme korden svarende til den halve vinkel ved formlen

$$\text{kord}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 60 \cdot (120 - \text{kord}(180° - \alpha))$$

Anvendes denne formel gentagne gange kan man altså ud fra $\text{kord}(12°)$ beregne $\text{kord}(6°)$, $\text{kord}(3°)$, $\text{kord}(1\tfrac{1}{2}°)$ og $\text{kord}(\tfrac{3}{4}°)$. Når man så har beregnet korden for så små vinkler, så vil det jo være nemt at beregne sig frem til en kordetabel med et spring på $1\tfrac{1}{2}°$, hvis bare man kan finde en *additionsformel* for korder ligesom vi ovenfor fandt en *subtraktionsformel* for korder. Ptolemaios udleder så en sådan additionsformel, nemlig

$$120 \cdot \text{kord}(180° - (\beta + \alpha)) = \text{kord}(180° - \alpha) \cdot \text{kord}(180° - \beta) - \text{kord}(\alpha) \cdot \text{kord}(\beta)$$

Både subtraktionsformlen og additionsformlen minder meget om tilsvarende formler, som gælder for sinus og cosinus.

Men Ptolemaios mangler at bestemme $\text{kord}(1°)$. Hvis han var tilfreds med et overslag, så kunne han have beregnet dette ud fra de kendte værdier for $\text{kord}(\tfrac{3}{4}°)$ og $\text{kord}(1\tfrac{1}{2}°)$. Fordi $\tfrac{3}{4}$ er jo netop det halve af $1\tfrac{1}{2}$, og da $\text{kord}(\tfrac{3}{4}°) \approx \frac{1}{2} \cdot \text{kord}(1\tfrac{1}{2}°)$, så er det jo nærliggende at tro, at $\text{kord}(1°) \approx \frac{2}{3} \cdot \text{kord}(1\tfrac{1}{2}°)$ ligesom 1 jo netop er $\tfrac{2}{3}$ af $1\tfrac{1}{2}$. Derved ville han få $\text{kord}(1°) = 1;2,50$, som faktisk er den værdi, der er angivet i kordetabellen. Men han ønsker præcision, så han viser endnu en sætning, som han anvender til at bevise, at $\text{kord}(1°) = 1;2,50$. Endelig fuldender han tabellen ved beregning af $\text{kord}(\tfrac{1}{2})$, som beregnes ud fra halvbueformlen.

ISBN 9788770668279

Appendiks: ”Almagest”

”Almagest” er opbygget af 13 bøger, hvori Ptolemaios beskriver alle astronomiens fænomener, og specielt hans detaljerede beskrivelser af hver planets bevægelse er unik. Ptolemaios foretog selv en del observationer, og i ”Almagest” medtager han Hipparchos' stjernekatalog, som han udvider fra 850 til 1022 stjerner.

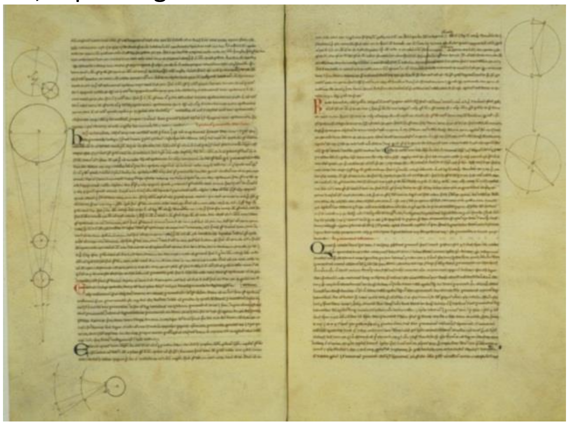
I ”Almagest” er der elementer fra mange andre civilisationer, som det er karakteristisk for hellenistisk litteratur. Man finder, som vi så ovenfor, anvendelse af det babylonske talsystem men også flere ægyptiske elementer. Fx anvender Ptolemaios konsekvent, at et døgn udgør 24 timer, hvilket er en ægyptisk opfindelse, og enkelte steder anvender han brøker, som man gjorde i Ægypten, dvs. stambrøker fx: Ð¢Ƨ¢= $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$, som vi jo i dag skriver som $\frac{3}{4}$.

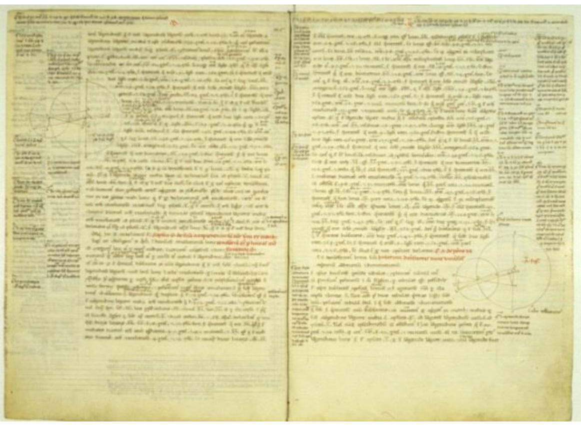
Nedenfor ses sider fra en græsk udgave af "Almagest" fra det 9. årh. fra Vatikanets bibliotek – bemærk især tabellen og de mange tilskrevne noter, som også bliver kilder i forståelse af værkets betydning:

Se en større udgave her: http://www.loc.gov/exhibits/vatican/images/math09a.jpg

ISBN 9788770668279

I 1160 blev "Almagest" igen oversat fra græsk af en ukendt oversætter på Sicilien. Det var en meget fin kildenær oversættelse, men den vandt ingen særlig udbredelse. I det 15. årh. dukkede den viste udgave dog op i Firenze. Her ses til venstre Bog XII kapitel 8-9, hvor der i margin er tegnet planetmodeller.
Til højre ses en udgave af "Almagest" fra det 13. årh. Den indeholder den vigtigste middelalderlige latinske oversættelse af "Almagest", som stammer fra 1175 oversat af Gerard fra Cremona, Spanien. Siderne viser Book X kapitel 6-7, der bl.a. indeholder Ptolemæus' beskrivelse af hans kinematiske model for bevægelse af Mars, Jupiter og Saturn.

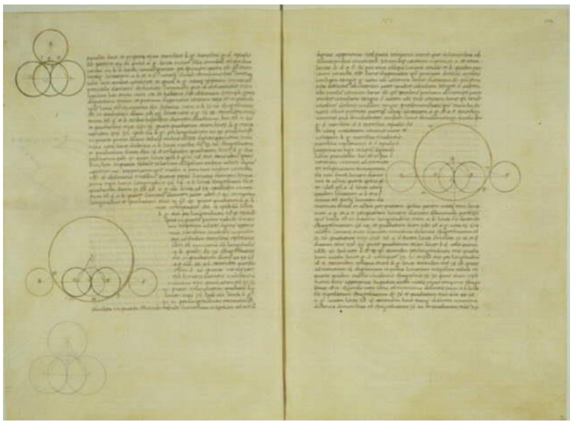




Se større udgaver her:
http://www.loc.gov/exhibits/vatican/images/math10a.jpg
http://www.loc.gov/exhibits/vatican/images/math11a.jpg

Ptolemaios' "Handy tables", som vi vel kunne kalde "Praktiske tabeller", beregnet til praktisk beregning, blev redigeret af Theon af Alexandria i det 4. årh. evt. og blev, med forskellige modifikationer grundlaget for senere astronomiske tabeller. Med disse tabeller kunne man beregne positioner for sol, måne og planeter samt solformørkelser og måneformørkelser langt hurtigere end med de tabeller, der indgår i "Almagest". Forsiden af værket viser zonerne for de 6 nordlige stjernetegn elegant tegnet i hvidt mod den mørke blå nattehimmel.

Se en forstørrelse her:
http://www.loc.gov/exhibits/vatican/images/math12a.jpg



George Trebizond, en af de bemærkelsesværdige græske lærde, der kom til Italien i det tidlige 15. årh., lavede en ny oversættelse af Almagest fra græsk for Pave Nicholas V. I dette manuskript er der anvendt farver på figurerne. Disse sider viser Bog VI kapitel 7, hvor varigheden af sol- og måneformørkelser beregnes.

Se en større udgave her:
http://www.loc.gov/exhibits/vatican/images/math17.jpg