ISBN 9788770668279

L&R Uddannelse EGMONT

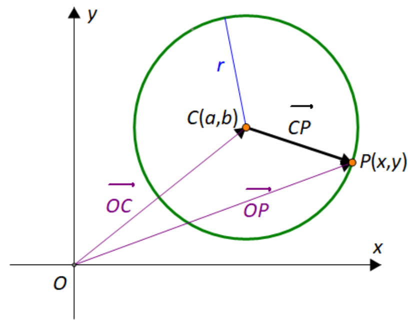
Projekt 6.15 Cirklens ligning

Ud fra længdeformlen kan vi bestemme en ligning for en cirkel. En cirkel består jo netop af de punkter, hvis afstand til centrum er lig med radius.

Sætning: Ligningen for en cirkel
Cirklen med centrum i $C(a,b)$ og radius r har ligningen $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$.

Bevis
Lad $C(a,b)$ være cirklens centrum, og lad $P(x,y)$ betegne et tilfældigt punkt på cirklen. Forbindelsesvektoren $\overrightarrow{CP}$ får da koordinaterne

$\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OC}$	Opskriv $\overrightarrow{CP}$ ud fra stedvektorer
$\overrightarrow{CP}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$	Indsæt koordinater
$\overrightarrow{CP}=\begin{pmatrix}x-a\\y-b\end{pmatrix}$	Anvend differensregel
Længdeformlen giver nu, at	$\left\lvert\overrightarrow{CP}\right\rvert=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$
Kalder vi cirklens radius for r, får vi:	
$r=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$	Indsæt $\left\lvert\overrightarrow{CP}\right\rvert=r$
$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$	Kvadrer



Eksempel: Cirklens ligning
En cirkel har centrum i $C(3,2)$ og går igennem punktet $P(11,-4)$.
Vi vil bestemme en ligning for cirklen.
Radius i cirklen bestemmes som længden af en radiusvektor:

$$\overrightarrow{CP}=\begin{pmatrix}11-3\\-4-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\-6\end{pmatrix}.\ \text{Dvs: } r=\sqrt{8^2+(-6)^2}=\sqrt{100}=10\,.$$

Vi kan nu opskrive ligningen for cirklen: $(x-3)^2+(y-2)^2=10^2$.

Det er naturligvis ikke ofte man får en radius, der er et pænt helt tal. Men da tallet r^2 indgår i ligningen betyder det mindre.

Øvelse 1
Bestem ved brug af et værktøjsprogram ligningen for:
a) Cirklen med centrum i $C(3,-1)$ og radius $r=6$.
b) Cirklen, der går gennem $P(2,-8)$, og som har centrum i $C(-3,4)$.
c) Kontroller dine resultater ved at konstruere cirklen i et geometrisk værktøjsprogram ved brug af programmernes indbyggede faciliteter.

Eksempel: Omskrivning af ligninger til cirkel på normal form
En kugles ligning på normal form er som angivet i sætningen. Et eksempel kunne være:

$$(x-3)^2+(y+2)^2=10 \qquad (*)$$

Dette er ligningen for kuglen med centrum i $C(3,-2)$ og radius $r=\sqrt{10}$.
Ganger vi parenteserne ud kan vi få vi ligningen skrevet således efter at have reduceret:

$$x^2+y^2-6\cdot x+4\cdot y+3=0 \qquad (**)$$

Vi har regnet i hånden og her anvendt de to *kvadratsætninger* (gennemgået i kapitel 0 og 7):

$$(a+b)^2=a^2+b^2+2\cdot a\cdot b \qquad (a-b)^2=a^2+b^2-2\cdot a\cdot b$$

(Kontroller evt. udregningerne med en expand-kommando).

ISBN 9788770668279

Da vi blot har ganget parenteserne ud, fremstiller de to ligninger (*) og (**) samme punktmængde.
Hvis vi havde fået opgivet ligningen (**) skulle vi derfor kunne bestemme radius og centrum ved at omskrive til (*).
Det kan vi gøre efter følgende opskrift:
Først flyttes tallet 3 over på den anden side:

$$x^2+y^2-6\cdot x+4\cdot y=-3 \qquad (***)$$

Læg nu mærke til, at koefficienterne -6 og $+4$ til de to led $-6\cdot x$ og $+4\cdot y$ hver for sig er det dobbelte af de tal, der indgår i parenteserne i (*). Disse tal stammer fra koordinaterne til centrum. Derfor kan vi aflæse koordinaterne til centrum ved at halvere koefficienterne og skifte fortegn! Og vi kan opskrive venstreside af ligningen (*):

$$(x-3)^2+(y+2)^2$$

Men ganger vi fx parentesen $(x-3)^2$ ud, får vi

$$(x-3)^2=x^2-2\cdot 3\cdot x+3^2=x^2-6\cdot x+9$$

Tallet 9 "mangler" i (***) for at vi kan anvende kvadratsætningen baglæns (fra højre mod venstre). Tilsvarende mangler vi tallet $2^2=4$ for at kunne omskrive til y - parenteserne. Derfor lægger vi dette tal til på begge sider i (***):

$$x^2-6\cdot x+9+y^2+4\cdot y+4=-3+9+4$$

$$(x^2-6\cdot x+9)+(y^2+4\cdot y+4)=10 \qquad \text{Reducer og saml i parenteser}$$

$$(x-3)^2+(y+2)^2=10$$

Vi aflæser: Ligningen fremstiller cirklen med centrum i $C(3,-2)$ og radius $r=\sqrt{10}$.
Bemærkning: Giver reduktionen 0 på højre side, fremstiller ligningen ét punkt, nemlig *C*. Giver reduktionen et negativt tal, er der ingen punkter, der tilfredsstiller ligningen.

Øvelse 2
Undersøg, hvilken punktmængde følgende ligninger beskriver:

a) $x^2+y^2-12\cdot x+8\cdot y+3=0$
b) $x^2+y^2-2\cdot x+4\cdot y+5=0$
c) $x^2+y^2-2\cdot x+6\cdot y+44=0$
d) $x^2+y^2+8\cdot x-6\cdot y+100=0$

Eksempel: Anvendelse af værktøjer til cirkelomskrivninger
Den omskrivning, vi foretager kaldes for *kvadratkomplettering.* Det kan værktøjsprogrammer ofte klare for os. Find ud af, hvordan dette gøres på dit værktøjsprogram.