ISBN 9788770668279

L&R Uddannelse
EGMONT

Projekt 6.13 Linjer og cirkler ved trekanten

Indhold

ISBN 9788770668279

Midtnormalerne i en trekant

Konstruér et linjestykke (punkt-menuen) og navngiv endepunkterne A og B (højreklik og vælg: Etiket), dvs linjestykket betegnes AB.
Konstruer midtnormalen på linjestykket AB, dvs. den linje, der går gennem linjestykkets midtpunkt M og samtidigt står vinkelret på linjestykket AB. Der er flere måder, at gøre dette, men det nemmeste er at anvend værktøjet Midtnormal fra Konstruer-menuen.
Overvej: Hvordan kunne du have konstrueret midtnormalen kun ved brug af cirkel og linje-værktøjerne (svarende til passer og lineal)?
Kontrollér din konstruktion ved at trække rundt i det ene endepunkt A.

1. Konstruér nu en trekant ABC og dens tre midtnormaler m_a, m_b og m_c. Navngiv sider og vinkler efter sædvanlig standard, således at vinkel A ligger overfor siden a osv.
   Sørg for at alle midtnormalerne rører hinanden.
2. Træk trekanten rundt i dens ene hjørne og observer, hvad der sker med midtnormalerne. Hvad er åbenbart karakteristisk for de tre midtnormaler?
3. Konstruér midtnormalernes skæringspunkt M (Skæringspunkt fra Punkt-menuen)
4. Mål afstanden fra A til M, afstanden fra B til M og afstanden fra C til M.
   Hvad er karakteristisk for de tre midtnormalers fælles skæringspunkt M?
5. Konstruér trekantens omskrevne cirkel c1 ved brug af Cirkel-værktøjet i Former-menuen, idet du udpeger cirklens centrum og et punkt på cirklens periferi.
6. Kontrollér din konstruktion ved at trække rundt i det ene trekantpunkt A.

Vinkelhalveringslinjerne i en trekant

En vinkel betegnes $\angle ABC$ svarende til de tre punkter, den er konstrueret ud fra.
Konstruer punkterne A, B og C (Punkt-værktøjet ligger i Punkt-menuen).
Konstruer nu linjestykket BA samt linjestykket BC, hvorved du får konstrueret vinkel ABC, hvor B er vinklens toppunkt (det midterste bogstav betegner altid vinklens toppunkt).
Udpeg nu de tre punkter (med toppunktet B som det midterste punkt) og konstruér vinkelhalveringslinjen ved hjælp værktøjet Vinkelhalveringslinje, som ligger under Konstruer-menuen.

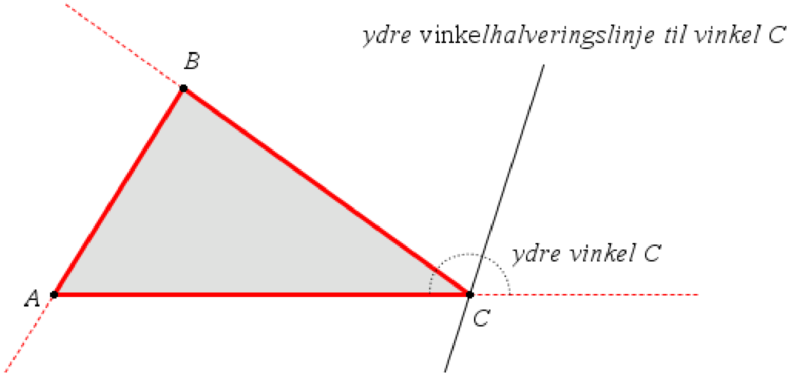
1. Konstruér en trekant ABC og dens vinkelhalveringslinjer v_A, v_B og v_C, og giv dem en farve. Navngiv sider og vinkler efter sædvanlig standard, således at vinkel A ligger overfor siden a osv.
2. Træk trekanten rundt i dens ene hjørne og observér, hvad der sker med vinkelhalveringslinjerne.
   Hvad er åbenbart karakteristisk for de tre vinkelhalveringslinjer?
3. Konstruér vinkelhalveringslinjernes skæringspunkt V.
4. Konstruer vinkelrette linjer på hver af trekantens sider gennem skæringspunktet V, og konstruer linjernes skæringspunkter med trekantens sider. Navngiv disse S_a, S_b og S_c svarende til den af trekantens sider skæringspunktet ligger på.
5. Konstruer linjestykkerne VS_a, VS_b og VS_c, og skjul herefter de vinkelrette linjer (højreklik på hver af linjerne og vælg Skjul).
6. Mål nu længden af linjestykkerne VS_a, VS_b og VS_c (svarende til den vinkelrette afstand fra V til henholdsvis siden a, siden b og siden c).
   Hvad er karakteristisk for de tre vinkelhalveringslinjers fælles skæringspunkt V?
7. Konstruér endeligt trekantens indskrevne cirkel c2 ved brug af Cirkel-værktøjet i Former-menuen, idet du udpeger cirklens centrum og et punkt på cirklens periferi.

7\. Kontrollér din konstruktion ved at trække rundt i det ene trekantshjørne A.

ISBN 9788770668279

Udfordring:

Til en given trekant hører der ikke blot tre indre vinkler, men også tre ydre vinkler:



De ydre vinkler har også vinkelhalveringslinjer som vist på figuren.

1. Konstruér den ydre halveringslinje gennem et trekantshjørne, idet du først forlænger trekantens sider ved at konstruere linjer gennem trekantens hjørner.
   Hvilken forbindelse er der mellem den indre og den ydre vinkelhalveringslinje?
   Hvordan kan man så nemt konstruere den ydre vinkelhalveringslinje, når man allerede har fundet den indre?
2. Konstruér de sidste to ydre vinkelhalveringslinjer, og sørg for at de ydre vinkelhalveringslinjer fortsætter på begge sider af hjørnepunktet.
   Hvad gælder der om tre vinkelhalveringslinjer når to af dem er ydre og den tredje indre?
3. Konstruer de tre skæringspunkter mellem to ydre og en indre vinkelhalveringslinje, og navngiv disse P_a, P_b og P_c.
4. Konstruerer vinkelrette linjer gennem S ind på trekantens sider, og konstruer de vinkelrette linjers skæringspunkter R_a, R_b og R_c med trekantens sider.
5. Konstruér de tre ydre røringscirkler, dvs. de tre cirkler, der tangerer trekantssiderne eller deres forlængelser udefra (konstrueres med centrum i P_x og periferipunkt i R_x).
6. De ydre vinkelhalveringslinjer afgrænser en trekant. Konstruer denne trekant op og navngiv den A'B'C', således at A' ligger overfor A osv.
   Hvilken rolle spiller de indre vinkelhalveringslinjer for trekanten ABC i denne nye trekant A'B'C'?

Højdetrekanten

1. Konstruér en trekant ABC med tilhørende højder h_a, h_b og h_c, idet højderne konstrueres som vinkelrette linjer på hver af trekantens sider op igennem det modstående hjørne.
2. Konstruér højdernes fodpunkter H_a, H_b og H_c på de tre trekantssider a, b og c (svarende til skæringspunkterne mellem trekantens sider og de vinkelrette linjer konstrueret ovenfor).
3. Forbind fodpunkterne til en lille trekant, højdetrekanten $H_aH_bH_c$, der ligger inde i den store trekant ABC når denne er spidsvinklet.
   Hvilken rolle spiller de tre højder fra den store trekant for den lille højdetrekant?
   Prøv at deformere trekanten ABC ved at trække i et af dens hjørner og se godt efter om højderne fra den store trekant svarer til nogle bestemte linjer i den lille trekant.
4. Når du har et gæt, så afprøv dit gæt ved hjælp af passende målinger.
5. Hvad sker der hvis trekant ABC er stumpvinklet?

ISBN 9788770668279

Medianerne i en trekant

1. Konstruér en trekant ABC og de tre midtpunkter for siderne M_a, M_b og M_c.
2. Konstruer linjestykkerne AM_a, BM_b og CM_c, hvorved vi får konstrueret trekantens medianer.
3. Træk trekanten rundt i dens ene hjørne og observer, hvad der sker med medianerne.
   Hvad er åbenbart karakteristisk for de tre medianer?
4. Konstruér medianernes skæringspunkt T. Det kaldes også for trekantens tyngdepunkt.
5. Skjul medianerne og konstruer i stedet de seks linjestykker: AT, BT, CT og TM_a, TM_b og TM_c, dvs linjestykket AT og linjestykket TM_a udgør tilsammen medianen m_a.
6. Mål længden af disse seks (tre lange og tre korte) linjestykker, og gem disse målinger (højreklik, vælg Lagre og skriv et passende navn fx ma1, mb1, mc1 for de tre lange og ma2, mb2, mc2 for de tre korte).
7. Udfør nu en beregning:
   Skriv med tekstværktøjet fx $\frac{\text{ma1}}{\text{ma2}}$, højre-klik på teksten og vælg beregn: Udpeg så de variable, der er tale om (eller tryk L to gange).
   Herved beregnes forholdet mellem den store del af medianen og den lille del af medianen.
   Hvad er åbenbart karakteristisk for forholdet mellem den store del og den lille del af medianen?
8. Konstruér nu midtpunktstrekanten $M_aM_bM_c$.
9. Konstruer de tre midtnormaler for trekanten ABC.
   Hvilken rolle spiller disse tre midtnormaler for midtpunktstrekanten $M_aM_bM_c$?
   Prøv at deformere trekanten og se godt efter, om ikke midtnormalerne fra den store trekant svarer til nogle bestemte linjer i den lille trekant. Når du har et gæt, så afprøv dit gæt ved hjælp af passende målinger.

Euler-linjen

1. Konstruér en trekant ABC med tilhørende medianer, midtnormaler og højder (giv hver linje-kategori en farve).
   Ud over deres indbyrdes skæringspunkter henholdsvis T, M og H konstruerer du også forbindelseslinjen gennem M og H – den berømte Eulerlinje (som altså skal forlænges til begge sider ud over M og H).
2. Hvad observerer du? Hvordan ligger de tre punkter i forhold til hinanden?
   Bekræft dine gæt ved hjælp af passende målinger og beregninger.
3. Konstruerede cirklen gennem trekantssidernes midtpunkter M_a, M_b og M_c, dvs midtpunktstrekantens omskrevne cirkel.
4. Hvordan ligger centrum for denne cirkel i forhold til de andre punkter på Eulerlinjen?

ISBN 9788770668279

Nipunktscirklen

1. Afsæt tre punkter A, B og C, og forbind dem med linjestykker til trekant ABC.
2. Konstruer midtpunkterne M_a, M_b og M_c på de tre sider a, b og c.
3. Konstruér nu de tre højder i trekanten samt deres indbyrdes skæringspunkt D.
4. Skjul højderne og konstruer linjestykkerne AD, BD og CD.
5. Konstruer midtpunkterne på de tre linjestykker AD, BD og CD.
6. Konstruer en vinkelret linje på hver af de tre linjestykker AD, BD og CD gennem linjestykkets midtpunkt.
7. Konstruer skæringspunkterne A', B' og C' mellem hvert par af disse vinkelrette linjer.
8. Konstruer nu trekant A'B'C', og skjul de vinkelrette linjer.
9. Trekant A'B'C' kaldes trekant ABC´s duale trekant.
   De i alt seks højder fra den oprindelige trekant og den duale trekant skærer nu siderne i de to trekanter ABC og A'B'C' i ikke mindre end 12 punkter. Disse 12 punkter spiller en særlig rolle for trekanten ABC.
10. Konstruér en trekant ABC med den tilhørende duale trekant A'B'C', og de 12 skæringspunkter mellem højderne og siderne i trekanten ABC og dens duale trekant A'B'C'.
11. Konstruer midtpunktstrekanten for trekant ABC (dvs den trekant der fremkommer ved at forbinde sidernes midtpunkter), og konstruer midtpunktstrekantens omskrevne cirkel - den såkaldte Euler-cirkel.
12. Hvad observerer du?
13. Hvor ligger cirklens centrum i forhold til højdernes skæringspunkter H og H' i de to trekanter ABC og A'B'C'?
14. Kontrollér din konstruktion ved at trække rundt i det ene trekantshjørne A.

Bemærkning:
Ni-punktscirklen er opdaget af mange forskellige matematikere uafhængigt af hinanden og har fået tildelt mange forskellige navne i historiens løb. Historisk er den endt med at få navnet 9-punktscirklen, selv om den nok egentlig burde hedde 12-punktscirklen.

Udfordring:

Hvordan ligger 12-punktscirklen i forhold til trekantens indre og ydre røringscirkler?