ISBN 9788770668279

Projekt 6.11. Tunnelen på Samos – udgravet for 2500 år siden

Indhold

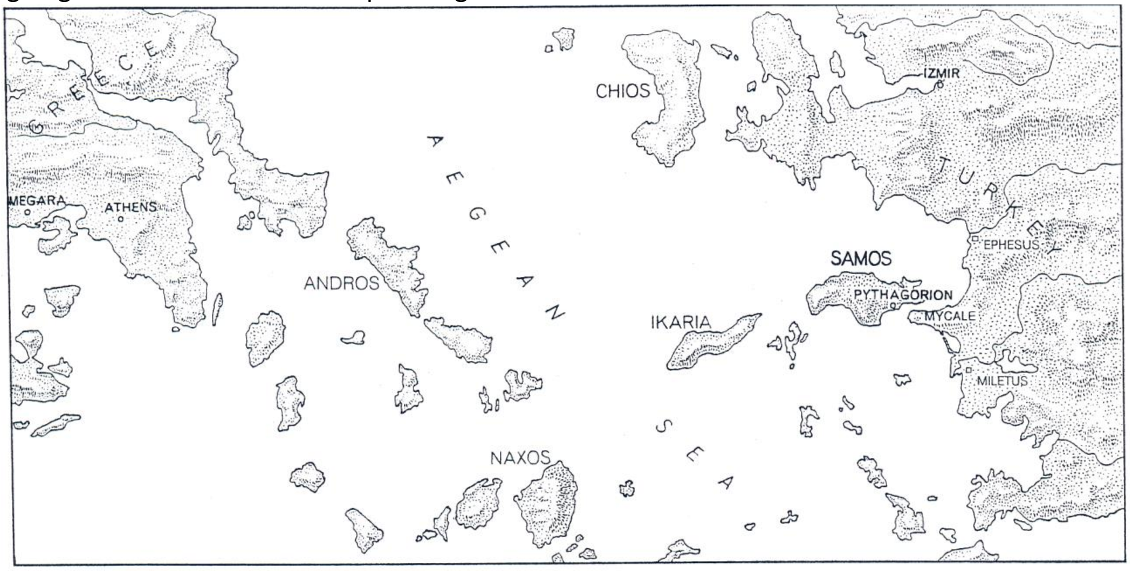
ISBN 9788770668279

Introduktion

Materialet i dette projekt omfatter ensvinklede trekanter, Pythagoras og den allerførste trigonometri.
Projektet handler om udgravning af tunneler og drejer sig om følgende enkle spørgsmål:

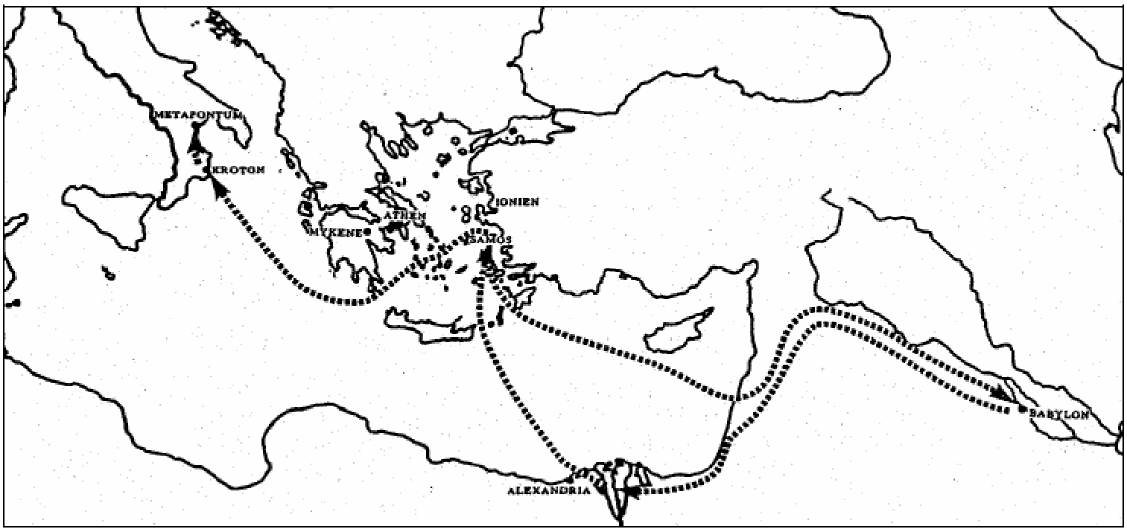
Hvordan kan man starte udgravningerne fra hver sin side og være sikker på at mødes på midten?

Selv om der bruges megen moderne teknik, så er det grundlæggende samme spørgsmål, man altid har skullet løse ved udgravningen af tunneler. Tunnelbyggeri i stor stil kendes helt tilbage fra oldtiden. Det mest imponerende af sådanne bygningsværker har man fundet på den græske ø Samos.



Figur 1 Det Ægæiske Hav

Bemærk at hovedbyen på øen har fået navn efter Pythagoras. Han blev nemlig født på denne ø omkring år 580 f.Kr. Vores viden om Pythagoras er i øvrigt behæftet med megen usikkerhed; men man formoder, at han i sin ungdom var på rejse både til Ægypten og til Babylon i Mesopotamien.
I disse lande havde flodkulturer allerede udviklet sig i flere tusinde år, og der var skabt en matematik og ingeniørkunst, som Pythagoras og andre grækere lærte om på deres rejser. Vi har således fundet små kileskrifttavler fra Mesopotamien der fortæller, at disse folk, 1000 år før Pythagoras besøgte landet, kendte til den sætning, vi i dag har givet Pythagoras' navn.



Figur 2 Pythagoras´ rejser

Da Pythagoras vendte hjem til Samos, havde en af de lokale stormænd, Polykrates taget magten på hele øen, og han styrede samfundet med diktatorisk magt. Pythagoras reagerede tilsyneladende på dette ved at drage videre, og han endte med at bosætte sig et helt andet sted, i Kroton i Syditalien (på denne tid havde grækerne små kolonier overalt i middelhavsområdet).
Men vi ved ikke, om han straks drog videre eller opholdt sig et stykke tid på Samos, og derfor ved vi heller ikke, om Pythagoras bidrog til det fantastiske ingeniørarbejde, som udgravningen af tunnelen var.

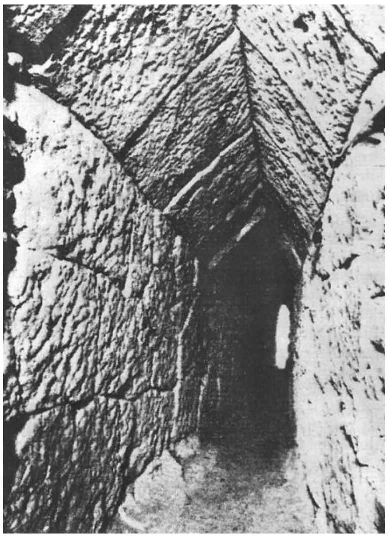
ISBN 9788770668279

Herodots fortælling om tunellen

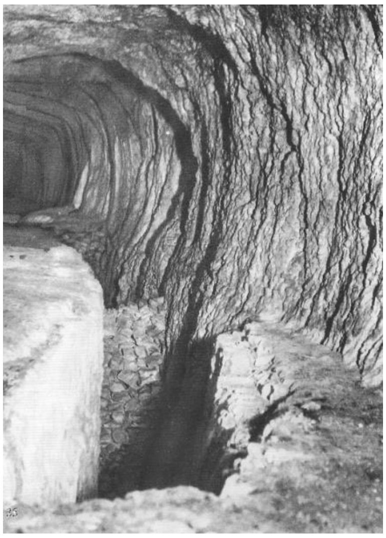
Tunnelen blev nemlig, så vidt vi ved i dag, udgravet i Pythagoras' levetid, mens Polykrates havde magten. Tunnelen er sammen med andre bygningsværker omtalt af en af oldtidens største historikere Herodot. Herodot skrev et værk, der simpelthen hedder Historien, hvori vi kan finde et større afsnit om Samos. Til slut heri hedder det:

> *Jeg har opholdt mig forholdsvis længe ved samierne, fordi de tre største arbejder, der er udført af hellenere, findes hos dem. Igennem et bjerg, der er ca. 150 favne højt, er der lavet en udgravning, der begynder forneden ved bjergets fod og er åben i begge ender. Længden af denne udgravning af 7 stadier, højden og bredden begge 8 fod. Gennem hele denne tunnel er der ført en anden grav, som er 20 alen dyb og 3 fod i bredden, og herigennem ledes vandet fra en stor kilde og når frem til byen gennem rør. Ingeniøren for dette arbejde var Eupalinos, søn af Naustrofos, fra Megara. Dette er det ene af de tre arbejder. Det andet er et moleanlæg ude i vandet til beskyttelse af havnen; molen har en dybde af ikke mindre end 20 favne og længden af den er mere end to stadier. Deres tredje storværk er et tempel, det største jeg nogensinde har set. Dets første bygmester var Rhoikos, søn af Files, og født på Samos. Dette er grunden til, at jeg har opholdt mig så forholdsvis længe ved samierne.*

Herodot elskede at fortælle gode og af og til fantastiske historier, så en del betvivlede denne historie om en tunnel gravet tværs gennem et bjerg. Men i slutningen af forrige århundrede fandt man den ved et rent tilfælde, og i dag har man ryddet gangen for nedfalden materiale. Under oprydningen fandt man genstande, der viste, at tunnelen havde været kendt og sikkert også brugt både i romertiden omkring år 0 og i den byzantinske tid op mod år 1000. Det er i dag muligt at komme ind i tunnelen fra begge ender; men man kan dog ikke få lov at kravle helt igennem:



Figur 3 Set mod sy gennem den smalle passage i retningen mod indgangen

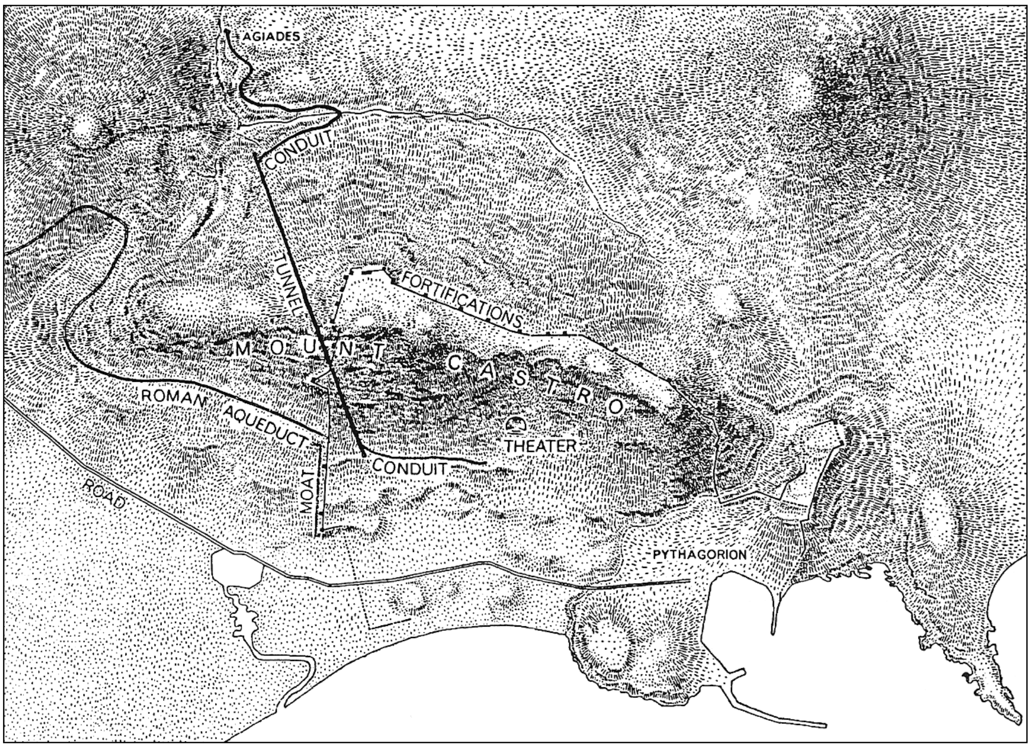


Figur 4 Tunnelinteriør, set mod nord. Vandkanalen ligger langs den østlige kant

Tunellens dimensioner

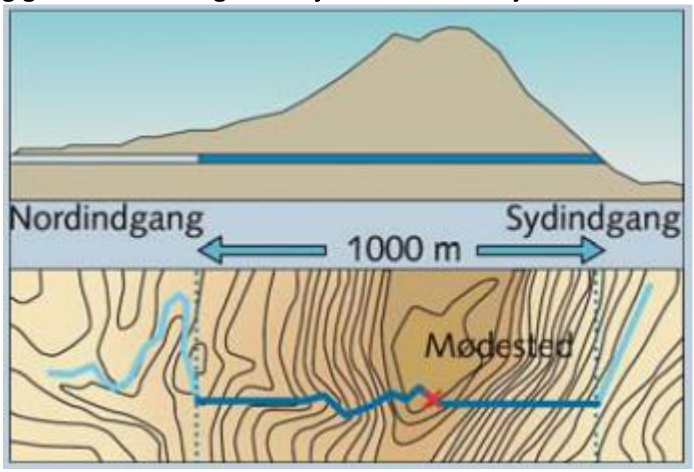
Tunnelen er bygget gennem et lille bjerg, der hedder Castro-bjerget, og formålet har været at sikre vandforsyningen til havnebyen. På den anden side af bjerget var der rigeligt med vand, og tunnelen, der lå godt skjult, kunne så forsyne byen under en eventuel belejring.

ISBN 9788770668279



Figur 5 Tunnelens linjeføring er den rette linje. Den slyngede linje er vandets løb udenfor tunnelen

Tunnelen var ca. 1 km lang, og godt 2 m bred og 2 m høj det meste af vejen.



Figur 6 Skematisk billede af den planlagte tunnel

De to billeder ovenfor illustrerer de tre afgørende spørgsmål, man skal besvare, før udgravningsholdene kan begynde fra hver sin side:

- Man skal starte i samme niveau over havets overflade.
- Man skal grave i en sådan retning, at de to hold mødes et sted midt inde under bjerget.
- Man skal i tunnelen lave en vandkanal med et lille fald, således at vandet flyder langsomt og ikke buldrer igennem og derved risikerer at ødelægge tunnelen.

Det amerikanske universitet CalTech producerede i 1990,erne en række videoer til brug for high school undervisningen. De er stadig seværdige. I dag er de lagt ind som you tube videoer. Du kan finde listen her:
https://www.youtube.com/playlist?list=PLobzDg55jB_ua-E0VVuKsXrpLVWkkiQWc
og her fx vælge:
Video Tunnel of Samos
Filmen har været en væsentlig inspirationskilde til dette projekt

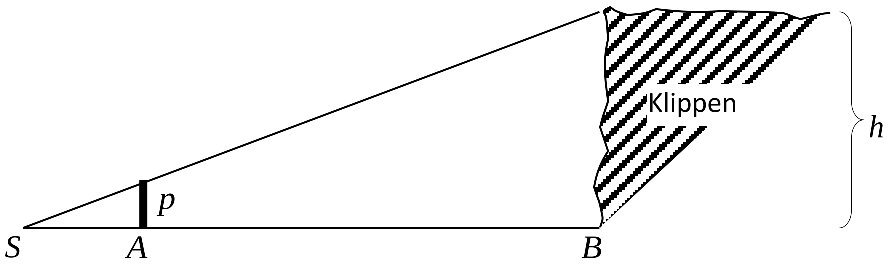
ISBN 9788770668279

1. Hvordan bestemmes højder?

Hvordan bestemmer man højden af et bjerg eller et stort træ eller noget andet, hvor man ikke bare kan måle det?
Et spørgsmål, der er beslægtet med dette, er følgende:
Hvordan bestemmer man afstande, som man ikke kan måle, f.eks. afstanden over en flod eller en afgrund?
Vi ved, at de gamle grækere var i stand til det. Der findes således fortællinger om, hvorledes græske matematikere bestemte højderne af pyramiderne. Vi går nu i deres fodspor.

Opgave 1 Højden af en lodret klippevæg (1)

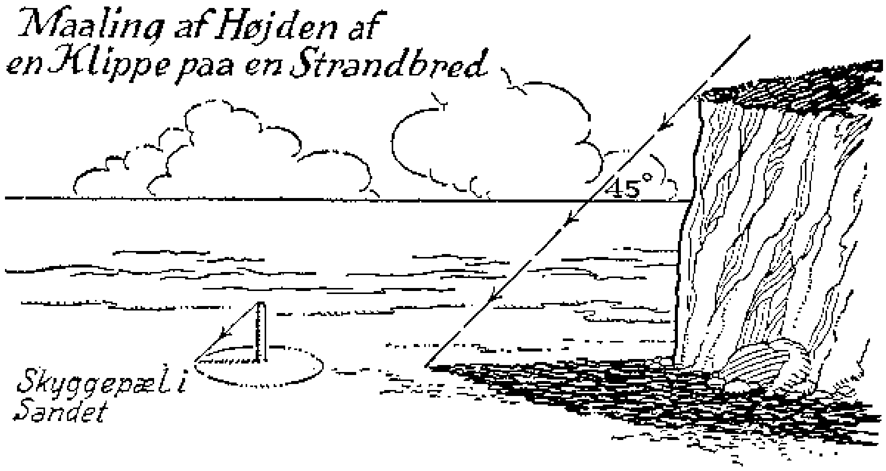
Du sigter med øjet (eller lader solens skygge gøre det for dig) og har følgende situation:



Pinden *p* er 1,8 meter høj.
Stykket *SA* er 3,2 meter langt.
Afstanden fra pinden til foden af klippen er 162 meter, dvs. $|AB|=162$.
Bestem højden *h*.

Opgave 2 Højden af en lodret klippevæg (2)

Situationen i opgave 1 gentages; men på et ganske bestemt tidspunkt af dagen, nemlig hvor solen står 45° over horisonten. Vi har da følgende situation:

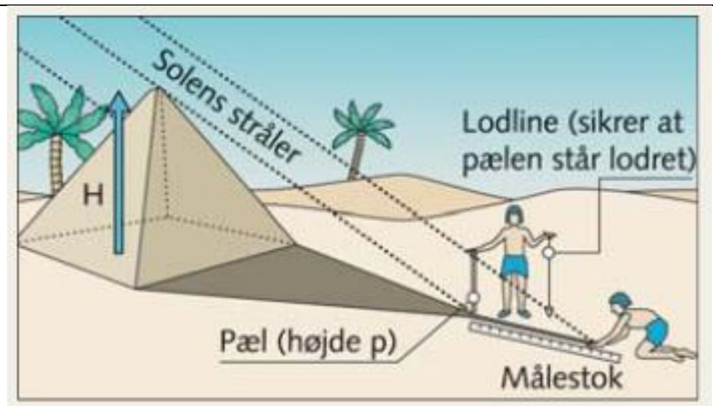


Forklar, hvorfor det bliver meget lettere at finde højden i denne situation.

Opgave 3 Højden af en pyramide

Vi ønsker at bruge metoden i opgave 1 til at finde højden af en pyramide. Vi har derfor følgende situation:

Forklar, hvad du har brug for at måle op for at kunne beregne pyramidens højde.



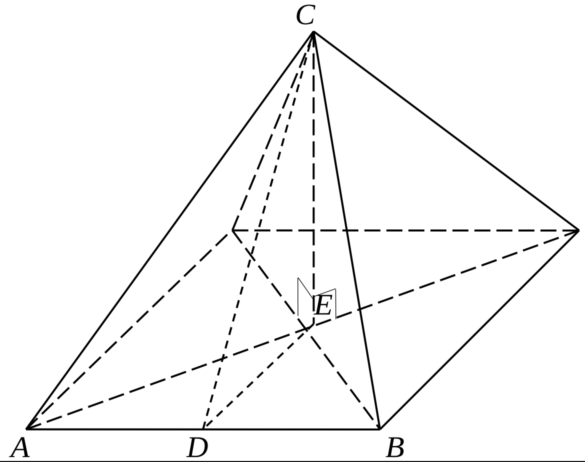
ISBN 9788770668279

L&R Uddannelse EGMONT

Opgave 4 Højden af en pyramide beregnet ved brug af Pythagoras' sætning

Vi kan jo ikke direkte måle højden af pyramiden; men derimod kan vi kravle op ad den skrå kant og måle, hvor langt der er fra foden til toppen. Den græske matematiker har lavet denne prøvetegning:

Hvilke oplysninger skal han kende for at kunne beregne højden?
Du får nu at vide, at *AB* er målt op til 116, og *CD* er målt op til 188.
Bestem pyramidens højde.



Opgave 5 To målinger er nok

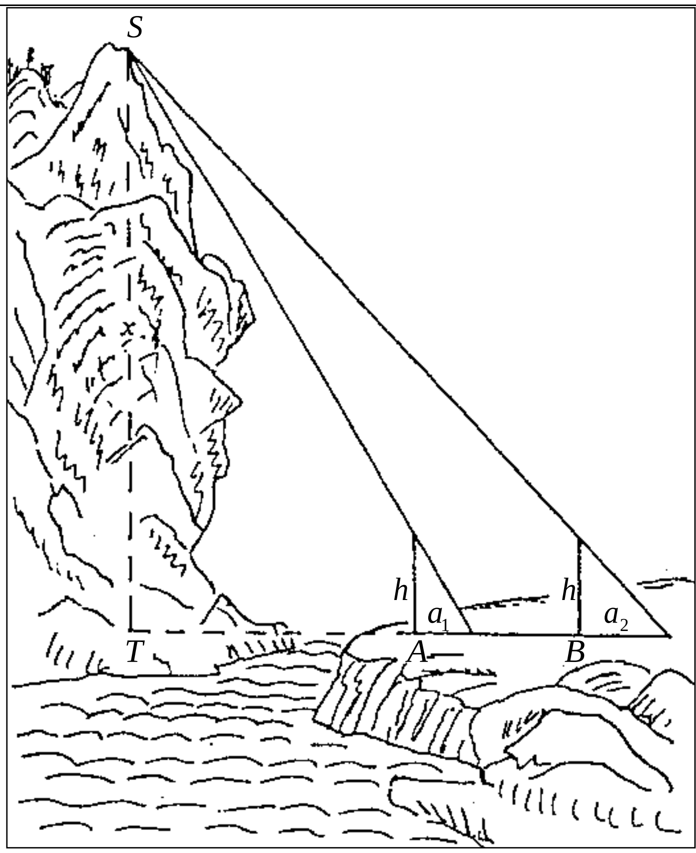
Forudsætningerne i opgave 1 var, at vi kunne måle afstanden helt hen til klippens fod; men det er sjældent tilfældet.

I en gammel kinesisk matematikbog kan vi se, at de også har stillet sig dette spørgsmål, og deres svar er, at vi kan løse problemet, hvis vi laver to målinger.

Vi ønsker at finde højden *x* af *ST*. Vi kalder stykket *TA*, som vi ikke kan måle, for y. Så foretager vi følgende målinger: h = 1, a_1 = 1,2 , a_2 = 1,7 og afstanden mellem pindene |*AB*| = 50.

a) Find to store trekanter, der er ensvinklede med de to små, og opskriv ved brug af *x* og *y* en ligning for hver.

b) Isolér *y* i hver ligning, og udnyt de to udtryk for *y* til at opstille en ligning, hvor *x* er eneste ubekendte, og løs denne.



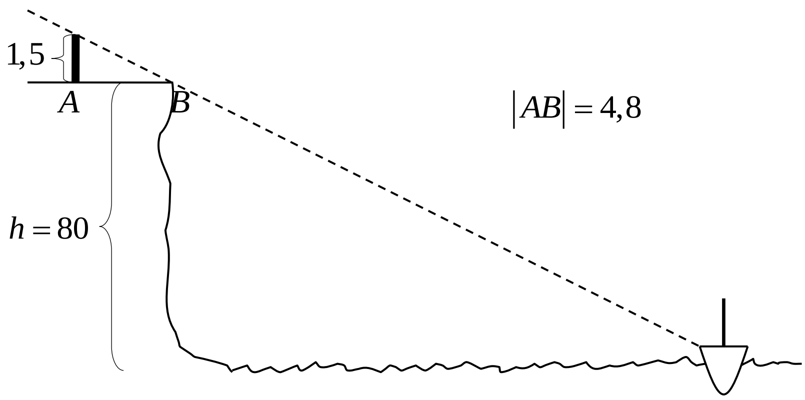
$|ST| = x \qquad |TA| = y \qquad |AB| = d$

ISBN 9788770668279

2. Hvordan bestemmes afstande

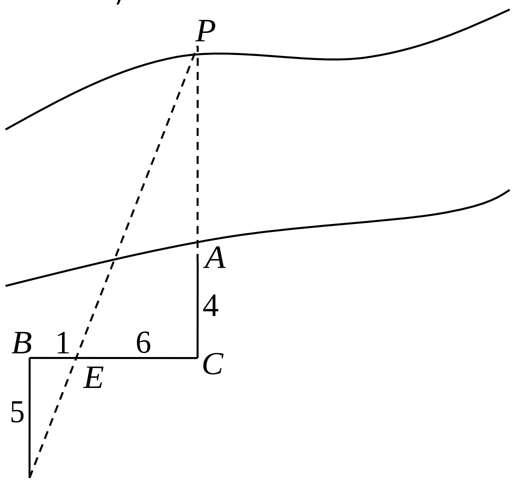
Opgave 6 Afstand til et skib ude på havet

Lad os antage, at vi ved, at højden af en næsten lodret klippe, der står ved havet er 80 meter. Vi ser et skib og foretager den måling, der er angivet på tegningen.
Brug oplysningerne til at finde afstanden til skibet.



Opgave 7 Hvor bred er floden?

Vi står på den ene side af en flod og vurderer, hvor bred den er. Tæt ved bredden af den anden side står et træ, vi kan bruge som sigtepunkt. Vi måler nu en afstand hen til et punkt *C*, og fra *C* går vi vinkelret på linjen *AC* og måler stykket *CB* op. Resultaterne indtegnes på en prøvefigur, så vi har følgende skitse (størrelsesforholdene er ikke korrekte!):



Hvor bred er floden?

Opgave 8 Vandret niveau

Hvordan findes samme vandrette niveau rundt om et bjerg?
Prøv at »lege ingeniører«, og forklar hvordan I ville kunne »bygge jer frem« til en løsning.

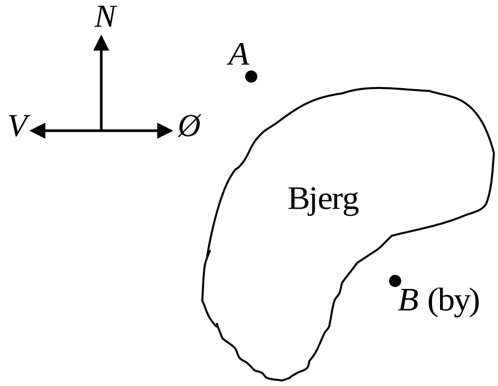
ISBN 9788770668279

3. Hvordan bestemmes en sigteretning?

Lad os nu sige, at vi har løst højdeproblemet.
Vi er i samme højdeniveau på hver side af et lille bjerg. I det ene punkt findes vandkilden, i det andet er vi tæt ved byen.

Opgave 9 Afstandsmåling med sigteretninger (1)

A og *B* kan ikke se hinanden. Der skal graves en tunnel fra *A* til *B*. Vi ønsker at grave fra begge sider.
Hvordan kan vi lægge en sigteretning de to steder, så vi er sikre på, at de to gravehold mødes?
Det kræver, at vi kender den helt nøjagtige placering af *A* og *B*. Lad os sige, at vi i *A* har fastlagt en retning nord-syd og vinkelret på retningen øst-vest:



Tegn nu en vej uden om bjerget fra *A* til *B*, således at du kan måle op, hvor meget *B* ligger øst for *A*, og hvor meget *B* ligger syd for *A*.
Forklar, hvordan du ud fra din vej vil måle de ønskede afstande.

Opgave 10 Pythagoras´ sætning og den omvendte Pythagoras´ sætning

Når vi ønsker at bevæge os efter to retninger, nord-syd og øst-vest, skal vi være i stand til at dreje præcis 90°. Det kan vi bruge Pythagoras' sætning til!
Den almindelige udgave af sætningen siger, at hvis vinkel *C* i trekant *ABC* er ret, så gælder, at

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Den såkaldte omvendte Pythagoras' sætning siger, at hvis formlen $a^2 + b^2 = c^2$ gælder i en trekant, så er vinklen *C* netop 90°.

a) Hvis en retvinklet trekant har de to kateter 8 og 6, hvor lang er da hypotenusen?

b) Hvis en retvinklet trekant har en katete på 10 og en hypotenuse på 12, hvor lang er da den anden katete?

c) Hvis en trekant har siderne 8, 7 og 11, er den så retvinklet, eller er den ikke retvinklet?

d) Du har tre stykker snor, et er 60 cm, et er 80 cm, og et er 1 m. Beskriv hvorledes du ved hjælp af disse kan konstruere en linje vinkelret på en anden linje.

Opgave 11 Afstandsmåling med sigteretninger (2)

Vi vender tilbage til punkterne *A* og *B*, og lad os nu sige, at punktet *B* ligger 970 meter længere sydpå og 380 meter længere østpå end A.

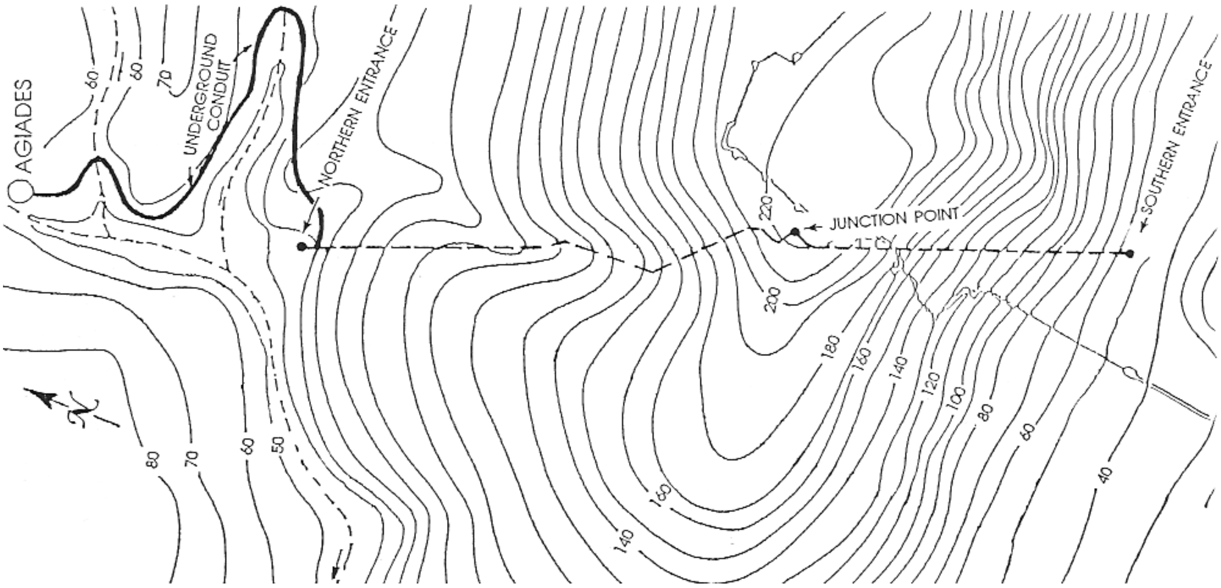
a) Konstruer en prøvefigur, hvor du indtegner den ønskede sigtelinje fra *A* til *B* (gennem bjerget), og hvor du har tegnet trekant *ABC* med de nævnte mål afsat.

b) Ved hjælp af ensvinklede trekanter skal du nu konstruere en lille trekant (uden for bjerget) ved punktet *A*, og som giver dig sigtelinjen fra *A* til *B*. Det samme skal du gøre ved *B* – lave en lille trekant, som giver dig sigtelinjen fra *B* til *A*.

ISBN 9788770668279

L&R Uddannelse EGMONT

Opgave 12 Tunnelens virkelige forløb



Figur 7 Tunnelens virkelige forløb

Planen viser tilnærmelsesvis zigzagkursen i den nordlige halvdel af tunnelen.
Man ved ikke, hvorfor det ene hold er begyndt at grave i zigzag, mens det andet holdt kursen. Har du et bud på hvorfor?

4. Hvordan beregnes en hældning?

Opgave 13 Vandledningen

Tunnelen består af en forholdsvis stor skakt, i tværsnit 2 meter × 2 meter, samt udgravet langs den ene væg den vandledning, det hele drejer sig om. Vandledningen skråner svagt nedad fra punktet A til punktet B. Det samlede fald er 9 meter.
Hvis tunnelen er 1036 meter lang, hvor stort er så faldet pr. meter? Hvor stort er det pr. 10 meter?

5. Afslutning – moderne positionsbestemmelse

Tunnelen under den østlige del af Storebælt fører jernbanetrafikken gennem to parallelle rør fra Halsskov til Sprogø. Tunnelen er 8.000 meter lang og blev boret ud fra hver sin side. Ved sådanne projekter anvendes i dag et system baseret på satellitmålinger til at fastslå den nøjagtige position af punkter som *A* og *B*. Systemet hedder GPS.

Opgave 14 Hvad er GPS?

Find i Encyklopædien eller på internettet en artikel om GPS, og giv en kort forklaring på idéen bag denne metode.