ISBN 9788770668279

Projekt 3.7. En algebraisk tilgang til udvidelsen af potensbegrebet

Lad i det følgende tallet a være et positivt tal.

En udvidelse af potensbegrebet, så et udtryk som a^x er defineret for alle reelle tal x, kræver i virkeligheden, at vi har styr på definitionen af de reelle tal. Det får vi først på A-niveau. Men vi kan gå et langt stykke af vejen og få en god fornemmelse for, hvorfor vi kun har et bestemt valg, når vi fx vil definere, hvad vi forstå ved $2^{-1.357}$.

Dette projekt er således et eksempel på hvordan matematik opbygges: Det er et lille aksiomatisk deduktivt forløb, hvor vi er omhyggelig med definitioner, med beviser, og hvor vi i hvert trin kun udnytter hvad vi hidtil har bevist. Vi starter med de naturlige tal.

1. Potenser og potensregler for de naturlige tal

Definition: Potenser

For alle tal a, og alle naturlige tal n defineres: $a^n = a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$ (på højre side står der i alt n a'*er*)

Eksempel: $3^6 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$

Bevis for de 5 potensregneregler for de naturlige tal	
Generelle formel	**Eksempel**
1. $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$	$3^2 \cdot 3^6 = 3^8$
Bevis for 1 (gangeparenteser kan sættes og hæves som vi ønsker): $a^n \cdot a^m = (a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)_{\text{n } a\text{'er}} \cdot (a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)_{\text{m } a\text{'er}} =$ $(a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a \cdot a)_{\text{n+m } a\text{'er}} = a^{n+m}$ *Forudsætninger*: Ingen, gælder for alle *a,n,m*	fordi gangeparenteser kan sættes og hæves som vi ønsker: $3^2 \cdot 3^6 = (3 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^8$
2. $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$	$\dfrac{3^6}{3^2} = 3^4$
Bevis for 2 (vi kan forkorte brøker, når tæller og nævner er skrevet som produkter): $\dfrac{a^n}{a^m} = \dfrac{(\cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \ldots \cdot \cancel{a} \cdot a \cdot \ldots \cdot a)_{\text{n } a\text{'er}}}{(\cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \ldots \cdot \cancel{a} \cdot \ldots \cdot \cancel{a})_{\text{m } a\text{'er}}} = \dfrac{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)_{\text{n-m } a\text{'er}}}{1} = a^{n-m}$ *Forudsætninger*: $a \neq 0$ og $m \leq n$	fordi vi kan forkorte brøker, når tæller og nævner er skrevet som produkter: $\dfrac{3^6}{3^2} = \dfrac{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}{3 \cdot 3} = \dfrac{\cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}{\cancel{3} \cdot \cancel{3}} = \dfrac{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}{1} = 3^4$
3. $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$	$\left(3^4\right)^2 = 3^{4 \cdot 2} = 3^8$
Bevis for 3 (gangeparenteser kan sættes og hæves som vi ønsker): $(a^n)^m = (a^n \cdot a^n \cdot \ldots \cdot a^n)_{\text{m } a^n\text{'er}} =$ $\left((a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)_{\text{n } a\text{'er}} \cdot (a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)_{\text{n } a\text{'er}} \cdot \ldots \cdot (a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)_{\text{n } a\text{'er}}\right)_{\text{m parenteser}}$ $= (a \cdot a \cdot \ldots \cdot a \cdot\ a \cdot a \cdot \ldots \cdot a \cdot \ldots \cdot\ a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)_{\text{i alt n·m } a\text{'er}} = a^{n \cdot m}$ *Forudsætninger*: Ingen, gælder for alle *a,n,m*	fordi gangeparenteser kan sættes og hæves som vi ønsker: $\left(3^4\right)^2 = 3^4 \cdot 3^4 = (3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) =$ $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^{4 \cdot 2} = 3^8$
4. $\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$	$\dfrac{8^5}{4^5} = \left(\dfrac{8}{4}\right)^5 = 2^5$
Bevis for 4 (brøker ganges sammen ved at gange tæller med tæller, nævner med nævner): $\dfrac{a^n}{b^n} = \dfrac{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)_{\text{n } a\text{'er}}}{(b \cdot b \cdot \ldots \cdot b)_{\text{n b'er}}} = \left(\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{a}{b} \cdot \ldots \cdot \dfrac{a}{b}\right)_{\text{n brøker}} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$ *Forudsætninger*: $b \neq 0$	fordi brøker ganges sammen ved at gange tæller med tæller, nævner med nævner: $\dfrac{8^5}{4^5} = \dfrac{8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8}{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4} = \dfrac{8}{4} \cdot \dfrac{8}{4} \cdot \dfrac{8}{4} \cdot \dfrac{8}{4} \cdot \dfrac{8}{4} = \left(\dfrac{8}{4}\right)^5 = 2^5$

L&R Uddannelse EGMONT

5. $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$	$2{,}5^5 \cdot 4^5 = (2{,}5 \cdot 4)^5 = 10^5$
Bevis for 5 (gangeparenteser kan sættes og hæves som vi ønsker, og multiplikation er kommutativ, så vi kan bytte om: $a \cdot b = b \cdot a$): $a^n \cdot b^n = (a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)_{\text{n } a\text{'er}} \cdot (b \cdot b \cdot \ldots \cdot b)_{\text{n } b\text{'er}} =$ $(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a \;\; \cdot b \cdot b \cdot \ldots \cdot b)_{\text{n a'er og n } b\text{'er}} =$ $\left((a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot \ldots (a \cdot b)\right)_{\text{n parenteser}} = (a \cdot b)^n$ *Forudsætninger*: Ingen, gælder for alle *a,b,n*	fordi gangeparenteser kan sættes og hæves som vi ønsker, og fordi multiplikation er kommutativ (dvs: vi kan bytte rundt: $2{,}5 \cdot 4 = 4 \cdot 2{,}5$) : $2{,}5^5 \cdot 4^5 = (2{,}5 \cdot 2{,}5 \cdot 2{,}5 \cdot 2{,}5 \cdot 2{,}5) \cdot (4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4) =$ $2{,}5 \cdot 2{,}5 \cdot 2{,}5 \cdot 2{,}5 \cdot 2{,}5 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 =$ $(2{,}5 \cdot 4) \cdot (2{,}5 \cdot 4) \cdot (2{,}5 \cdot 4) \cdot (2{,}5 \cdot 4) \cdot (2{,}5 \cdot 4) = (2{,}5 \cdot 4)^5 = 10^5$

2. Udvidelse af potensbegrebet, så alle rationale tal kan optræde som eksponent

(*De rationale tal er alle brøker, som fx* $\frac{22}{7}$ *. I et projekt i kapitel 7 beviser vi, at mængden af alle brøker svarer til mængden af alle decimaltal, der enten er endelige, som tallet 3,1415 eller er periodiske som tallet:* $3.142857142857\ldots = 3.\overline{142857}$. Tal som $\sqrt{2}$ og π er ikke rationale, dem omtaler vi i afsnit 3).

I projekt 3.1 gennemføres et argument for udvidelsen af potensbegrebet ud fra en betragtning af det *mønster* som potenserne tegner og en generalisering af dette.

Her vil vi gå en anden vej: Vi vil argumentere for, at hvis vi ønsker at *potensreglerne* skal være alment gyldige, dvs. også gælde for de nye potenser, vi definerer, så er der kun én mulighed for denne udvidelse. Vi vil specielt have fokus på den første af potensreglerne.

2.1. Tilfældet *n* = 0. Hvilken værdi skal vi tillægge tallet a^0 ?
Vi antager først, at $a \neq 0$
For et vilkårligt tal *n* skal der ifølge første potensregel gælde:

$$a^0 \cdot a^n = a^{0+n} = a^n$$

a^0 er en ukendt størrelse, hvis værdi vi er i færd med at fastlægge. Lad os kalde a^0 for *x*. Så er ligningen altså:

$$x \cdot a^n = a^n \text{, hvoraf vi får: } \quad x = \frac{a^n}{a^n} = 1$$

Konklusion: Hvis potensreglerne skal gælde, er vi nødt til at fastlægge værdien af $x = a^0$ til 1. For ikke at have undtagelser fra reglen vælger vi, at dette også skal gælde når $a = 0$:

Definition af a^0
For ethvert tal *a* fastlægger vi: $a^0 = 1$

ISBN 9788770668279

2.2 Tilfældet *n* = negativt helt tal. Hvilken værdi skal vi tillægge a^{-n}, hvor *n* er et naturligt tal?
For et vilkårligt *n* skal der ifølge første potensregel gælde:

$$a^{-n}\cdot a^n=a^{-n+n}=a^0$$

Men a^0 har vi lige fastlagt til at være 1, så ligningen er:

$$a^{-n}\cdot a^n=1$$

a^{-n} er en ukendt størrelse, hvis værdi vi er i færd med at fastlægge. Lad os kalde a^{-n} for *x*. Så er ligningen altså:

$$x\cdot a^n=1$$

Vi ønsker at isolere x, ved at dividere med a^n. Derfor ser vi nu, at vi må antage $a\neq 0$. Gør vi det, får vi:

$$x=\frac{1}{a^n}$$

Konklusion: Hvis potensreglerne skal gælde, er vi nødt til at fastlægge værdien af $x=a^{-n}$, hvor n er et naturligt tal og $a\neq 0$, til at være $\frac{1}{a^n}$.

> **Definition af a^{-n}**
>
> For ethvert tal $a\neq 0$, og ethvert naturligt tal *n* fastlægger vi: $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$

Bemærkning: Formlen $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$ er også korrekt, hvis *n* er et negativt tal. Lad os fx prøve med *n* = -7:

Venstre side: $a^{-(-7)}=a^7$, pga. fortegnsreglerne.

Højre side: $\frac{1}{a^{-7}}=\frac{1}{\frac{1}{a^7}}=\frac{a^7\cdot 1}{a^7\cdot\frac{1}{a^7}}=\frac{a^7}{\frac{a^7}{a^7}}=\frac{a^7}{1}=a^7$

Gør selv rede for, hvilke regneregler vi har udnyttet i omskrivningerne af højre side.
Alt i alt ser vi, at venstre side og højre side er ens.
Så når vi anvender definitionen af a^{-n}, behøver vi ikke antage at *n* er positiv.

2.3. Tilfældet $n=\frac{1}{2}$. Hvilken værdi skal vi tillægge $a^{1/2}$?
Ifølge første potensregel skal der gælde:

$$a^{1/2}\cdot a^{1/2}=a^{1/2+1/2}=a^1=a\text{, eller:}$$

$$a^{1/2}\cdot a^{1/2}=a$$

$a^{1/2}$ er en ukendt størrelse, hvis værdi vi er i færd med at fastlægge. Lad os kalde $a^{1/2}$ for *x*. Så er ligningen altså:

$$x\cdot x=a\text{, eller:}$$

$$x^2=a$$

Da $x^2\geq 0$ ser vi, at dette også må gælde for *a*. Dvs $a^{1/2}$ kan kun defineres for $a\geq 0$.
Hvis dette er opfyldt, dvs $a\geq 0$, så er løsningen på ligningen $x^2=a$:

$$x=\pm\sqrt{a}$$

Konklusion: Hvis potensreglerne skal gælde, er vi nødt til at fastlægge værdien af $x=a^{1/2}$, hvor $a\geq 0$, til enten $\sqrt{a}$ eller $-\sqrt{a}$. Hvis vi skal undgå undtagelser fra de forskellige regler, er vi nødt til at vælge den positive:

> **Definition af $a^{1/2}$**
>
> For ethvert tal $a\geq 0$ fastlægger vi: $a^{1/2}=\sqrt{a}$

ISBN 9788770668279

Argument for, at vi ikke kunne have valgt det negative tal $-\sqrt{a}$:
Vi ønsker at foretage udvidelsen, så der ikke skal være undtagelser fra vores definitioner, og således at alle potensreglerne bliver opfyldt. Lad os sige, vi havde valgt den negative løsning, så eksempelvis:

$$16^{\frac{1}{2}}=-\sqrt{16}=-4$$

Så ville vi ifølge regel nr 3 have: $\quad (16)^{\frac{1}{4}}=(16)^{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}=\left(16^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}=(-4)^{\frac{1}{2}}=-\sqrt{-4}$

Men $\sqrt{-4}$ giver ingen mening inden for de reelle tal.

Dvs vi ville ikke kunne give mening til $(16)^{\frac{1}{4}}$, hvilket strider mod hele vores projekt med udvidelse af potensbegrebet.

Dette er også forklaringen på den indledende antagelse om, at tallet a er positivt.

2.4. Tilfældet eksponenten = vilkårlig stambrøk, $\frac{1}{n}$ **.** Hvilken værdi skal vi tillægge $a^{1/n}$?

Øvelse

Gennemfør selv argumenter på linje med punkt 3, og argumenter for følgende definitioner:

> **Definition af** $a^{1/3}$
>
> For ethvert tal $a>0$ fastlægger vi: $\quad a^{1/3}=\sqrt[3]{a}$

> **Definition af** $a^{1/n}$
>
> For ethvert tal $a>0$ fastlægger vi: $\quad a^{1/n}=\sqrt[n]{a}$

5. Tilfældet $n=\frac{p}{q}$ **, hvor *p* og *q* er hele tal,** $q\neq 0$ **.** Hvilken værdi skal vi tillægge $a^{p/q}$?

For vilkårlige tal *p* og *q*, hvor $q\neq 0$ skal der ifølge 3. potensregel gælde:

$a^{p/q}=a^{p\cdot\frac{1}{q}}=\left(a^p\right)^{\frac{1}{q}}$, eller skrevet i en anden rækkefølge:

$$a^{p/q}=a^{\frac{1}{q}\cdot p}=\left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p$$

Men de to højresider af dette udtryk er jo begge definerede ovenfor, så derfor har vi:

$a^{p/q}=\left(a^p\right)^{\frac{1}{q}}=\sqrt[q]{a^p}$ **, og:**

$$a^{p/q}=\left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p=\left(\sqrt[q]{a}\right)^p$$

> **Definition af** $a^{p/q}$
>
> For ethvert tal $a>0$ fastlægger vi:
>
> $a^{p/q}=\sqrt[q]{a^p}\quad$ eller skrevet på en anden måde: $\quad a^{p/q}=\left(\sqrt[q]{a}\right)^p$

ISBN 9788770668279

Eksempel:

1) $2^{3/7} = \left(2^3\right)^{\frac{1}{7}} = \sqrt[7]{2^3} = \sqrt[7]{8}$, og $2^{3/7} = \left(2^{\frac{1}{7}}\right)^3 = \left(\sqrt[7]{2}\right)^3$

Du kan kontrollere, at de to tal faktisk er ens.

2) Et endeligt decimaltal, som 3,19 kan altid skrives som en brøk: $3{,}19 = \dfrac{319}{100}$.

Derfor har vi: $5^{3{,}19} = 5^{319/100} = \sqrt[100]{5^{319}}$

Kontroller på dit værktøj, at det kan udregne $5^{3{,}19}$, og at resultatet er netop $\sqrt[100]{5^{319}}$

2.6. Tilfældet $n = r$, hvor *r* er et vilkårligt positivt reelt tal. Hvilken værdi skal vi tillægge a^r ?
Svaret på dette spørgsmål skal fx give mening til et udtryk som 2^{π} .
Dette spørgsmål fører os ind i, hvad egentlig et reelt tal er. På A-niveau fordyber vi os i dette ret vanskelige problem. Men konklusionen er, at ethvert reelt tal kan skrives som et uendeligt decimaltal, og at det kan opfattes som en grænseværdi for alle de endelige decimaltal, der fremkommer ved at tage først heltalsdelen, så et ciffer med efter kommaet, så to, så tre osv i det uendelige.
For tallet π er denne række af tal: 3, 3.1, 3.14. 3.141, 3.1416, 3.14159. …
Og for hver af disse decimaltal har vi lige set, at potenser som $2^{3.14159}$ giver god mening.
Når vi udregner alle disse potenser, vi de konvergere mod et bestemt tal. Dette tal definerer vi som 2^{π} .

Man kan også sige, at hvis vi i et koordinatsystem ville indtegne 2^x , for alle rationale tal *x*, så ville det se ud som en sammenhængende graf, fordi de rationale tal ligger tæt overalt på tallinjen. Men der er huller, fordi de fleste tal i virkeligheden ikke er rationale. Vores definition af 2^x gør imidlertid præcis det, at den fylder hullerne ud, så grafen bliver sammenhængende.

Dermed er potensbegrebet udvidet til alle positive tal.