ISBN 9788770668279

Projekt 3.6 Introduktion til Induktionsbeviser

Et induktionsbevise er en særlig matematisk teknik til at bevise formler, der gælder for alle naturlige tal – eller for alle naturlige tal fra et vist trin. Man kan populært sige, at induktionsbeviser er den formelle matematiske argumentation bag "osv.".

Det centrale element i ethvert induktionsbevis er at bevise følgende helt generelt: Hvis formlen gælder for et bestemt tal, så gælder den også for det næste tal i talrækken. Dvs., hvis den gælder for 41, så gælder den også for 42, gælder den for 1017, så gælder den også for 1018, og generelt: Hvis den gælder for tallet *n*, så gælder den også for tallet *n* + 1.

Hvis vi så yderligere gennemfører et bevis for, at formlen faktisk gælder for tallet 1, eller for det første tal vi en interesseret i, så gælder den for alle tal. Fordi hvis den gælder for 1, gælder den også for 2, gælder den for 2, så gælder den også… Og dermed får vi alle tal med.

At vi faktisk får *alle* tal med, er en påstand, som også kaldes induktionsaksiomet, og som måske forekommer indlysende. Påstanden kan ikke selv bevises, den udtrykker en grundlæggende egenskab ved de naturlige tal. Induktionsaksiomet udtaler sig om *uendelige mængder* og kan derfor give anledning til en række filosofiske diskussioner. Vi beskriver det som en proces, men som sådan vil vi jo aldrig nå til vejs ende! Hvordan kan vi så sige, at "vi får alle med"? Men hvis det ikke er en proces, hvad er det så?

Øvelse.

a. Find på nettet information om induktionsbeviser og induktionsaksiomet.
b. Find yderligere information om begreberne "det potentielt uendelige" og "det aktuelt uendelige". Beskriv med dine egne ord, hvori forskellen på de to opfattelser af uendelighed består.

Vi illustrerer ideen i induktionsbeviser med to eksempler. Derefter er der nogle opgaver, der kan løses med induktionsbevis.

Eksempel nr. 1: Bevis for formlen $K_n = K_0 \cdot (1+r)^n$

Vi sikrer os allerførst, at det første tal i rækken er "bærer af egenskaben".
Vores formel giver mening for hele positive værdier af n, dvs. det første tal i rækken er $n=1$. Når $n=1$ svarer formlen blot til formel 2, så den gælder – altså er det første tal i rækken "bærer af egenskaben".

Antag at det m´te tal i rækken også er "bærer af egenskaben", dvs. at formlen gælder for tallet *m*. Så må der gælde at:

$$K_m = K_0 \cdot (1+r)^m . \qquad (*)$$

Vi vil nu ud fra (*) vise, at det næste tal i rækken $m+1$ også er "bærer af egenskaben", dvs. at formlen gælder for tallet $m+1$. Med andre ord ønsker vi at vise, at

$$K_{m+1} = K_0 \cdot (1+r)^{m+1} . \qquad (**)$$

Hvis vores startværdi er K_m, så ved vi fra formel 2, at vores slutværdi er

$$K_{m+1} = K_m \cdot (1+r) .$$

ISBN 9788770668279

Men ifølge (*) kan vi i stedet for K_m skrive $K_0 \cdot (1+r)^m$, og så får vi:

$$K_{m+1} = K_m \cdot (1+r) = K_0 \cdot (1+r)^m \cdot (1+r) = K_0 \cdot (1+r)^{m+1}$$

Dette er netop formlen i (**)!

Dvs. vi har vist at tallet $m+1$ er "bærer af egenskaben", hvis tallet før er "bærer af egenskaben". Altså hvis et tal i rækken er "bærer", så *arver* det næste tal i rækken egenskaben!

Bemærk: I den sidste omskrivning udnyttede vi en potensregneregel. De er omtalt i afsnit 4.3).

Da vi har vist, at det første tal i rækken er "bærer", så viser ovenstående, at også det andet tal i rækken er "bærer", og hvis det andet tal i rækken er "bærer", så er det tredje tal i rækken jo også "bærer" osv. Altså er alle tal i rækken "bærer af egenskaben", og derfor gælder (*) for alle tal n. Processen svarer til, at når man vælter den første brik i en række af dominobrikker, *og* vi samtidigt ved, at når en brik vælter, så vælter den næste også, så vælter de alle!

Men filosofisk set står begrebet *uendelighed* stadig og udfordrer os, for havde vi uendeligt mange dominobrikker, hvornår var så alle væltet? Det er derfor påstanden om, at formlen gælder for alle tal bygger på et *aksiom*, induktionsaksiomet. Al matematik starter i virkeligheden med *aksiomer*.

ISBN 9788770668279

Eksempel nr. 2: Bevis for sum-formlen $1+2+2^2+2^3+\ldots+2^n=2^{n+1}-1$
(Eksemplet er hentet fra kapitel 0 afsnit 2)
Lad os sige vi har set formlen gælder op til n = 5:

$$1+2+2^2+2^3+2^4+2^5=2^6-1$$

Vi kunne selvfølgelig bare regne denne og den næste ud, men for at forstå formlen gør vi følgende:

Næste formel i rækken har lagt 2^6 til på venstre side. Lad os derfor tage formlen ovenfor, som vi ved er sand, og lægge 2^6 til på begge sider:

$$1+2+2^2+2^3+2^4+2^5+2^6=2^6-1+2^6$$

På højresiden indgår nu to eksemplarer af tallet 2^6, dvs. vi kan omskrive til:

$$1+2+2^2+2^3+2^4+2^5+2^6=2\cdot 2^6-1$$

$$1+2+2^2+2^3+2^4+2^5+2^6=2^7-1 \qquad \text{Udnyt potensregel}$$

Men det er jo formlen for n = 6.

Dette må vi kunne gøre generelt. Lad os sige vi har set formlen gælder op til tallet n:

$$1+2+2^2+2^3+\ldots+2^n=2^{n+1}-1$$

Næste formel i rækken har lagt 2^{n+1} til på venstre side. Lad os derfor tage formlen ovenfor, som vi ved gælder, og lægge 2^{n+1} til begge sider:

$$1+2+2^2+2^3+\ldots+2^n+2^{n+1}=2^{n+1}-1+2^{n+1}$$

På højresiden indgår nu to eksemplarer af tallet 2^{n+1}, dvs. vi kan omskrive til:

$$1+2+2^2+2^3+\ldots+2^n+2^{n+1}=2\cdot 2^{n+1}-1,$$

$$1+2+2^2+2^3+\ldots+2^n+2^{n+1}=2^{n+2}-1 \qquad \text{Udnyt potensregel}$$

Men det er jo næste formel i rækken.

Dvs. når formlen er sand for ét tal n er den også sand for den næste og den næste og… .
Men så gælder formlen for alle tal

Formlen: $1+2+2^2+2^3+\ldots+2^n=2^{n+1}-1$

skrives også: $\sum_{i=1}^{n} 2^i=2^{n+1}-1$.

hvor symbolet $\sum$ er det græske bogstav sigma, der i matematik anvendes som symbol for sum. Det læses: ”summen af 2^i, hvor i løber fra 1 til n, er lig med …”

Opgaver
Nogle af de følgende opgaver kan også bevises ved et elegant matematisk trick. Men du skal prøve at løse dem med induktion.

Opgave 1
Der gælder følgende formel for summen af de første n naturlige tal:

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n\cdot(n+1)}{2}$$

a. Vis, at formlen for de første tal samt for n = 10.
b. Bevis formlen ved brug af induktion.

Opgave 2.

Alle ulige tal kan skrives på formen: $2 \cdot k - 1$, hvor *k* er et naturligt tal. Opskriv det ulige tal 25 på denne måde.

Det *tredje* ulige tal er 5. Dette kan skrives $2 \cdot 3 - 1$.

Det *femte* ulige tal er 9. Det kan skrives $2 \cdot 5 - 1$

Det *n´*te ulige tal kan skrives: $2 \cdot n - 1$

Der gælder følgende formel for summen af de *n* første ulige tal:

$$1 + 3 + 5 + ... + (2 \cdot n - 1) = n^2$$

a. Kontroller, at formlen gælder for $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$ og $n = 4$.

b. Bevis formlen ved brug af induktion.

Opgave 3

Tallet $n^3 - n$ er delelig med 3 for alle tal n.

a. Kontroller, at formlen gælder for $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$ og $n = 4$.

Antag nu, at påstanden i første linje er vist for alle tal op til tallet *n*.

b. Anvend dit værktøjsprogram til at udregne $(n+1)^3$.

Hvis et tal er deleligt med 3, er det med i 3-tabellen. Det betyder, at det kan skrives på formen $k \cdot 3$, for et eller andet helt tal *k*. Udnyt dette i det følgende.

c. Opskriv formlen for tallet $n + 1$, og bevis, at dette tal er deleligt med 3

Opgave 4

Der gælder følgende formel for summen af kvadrattal

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Kontroller, at formlen gælder for $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$ og $n = 4$.

Bevis formlen ved induktion efter samme princip som i Eksempel 2 ovenfor.

Perspektiverende opgave 5

a. Find ud af via nettet hvad Fibonaccital er. Prøv at udregne de første 10. Den teknik, hvor man opbygger en talfølge ved hele tiden at bygge videre på nogle af de foregående elementer, kaldes *rekursion*.

b. Det er ikke så ligetil at svare på, hvad Fibonaccital nr. 50 er. Men der findes faktisk en formel, kaldet Binets formel, der giver svaret. Find via nettet ud af, hvad Binets formel siger.

c. Kontroller Binets formel med tallet 10.

Binets formel kan bevises ved induktion, men hele beviset kræver, at man kan løse 2. grads ligninger, så det vender vi tilbage til i B-udgaven af *Hvad er matematik?*