ISBN 9788770668279

Projekt 3.2 Anlægsøkonomien i Storebæltsforbindelsen

Dette projekt handler, hvordan økonomien var skruet sammen, da man byggede storebæltsforbindelsen. Store anlægsprojekter er næsten altid helt eller delvist lånefinansieret. Vi får derfor brug for en viden om, hvordan sådanne lån betales tilbage.

I afsnit 2 gennemgår vi teorien bag opsparing og gæld og illustrerer med en række små øvelser. Dette afsnit er uafhængigt af resten i den forstand, at man kan nøjes med at trække på formlerne i afsnittet, hvis der ikke er tid til at gennemgå denne del af teorien.

Projektet kan gennemføres som et rent matematik-projekt, eller indgå i et samarbejde med fx samfundsfag om trafik og infrastruktur. Hvis man vælger det sidste, så kan materialer fra grundbogens afsnit 1 inddrages

Indhold

1. Anlægsøkonomien og fordelingen af udgifterne på tog og biler 2
2. Formler til beregning af opsparing og gæld 3
  2.1 Opsparingsannuitet 3
  2.2 Gældsannuitet 5
  2.3 Amortisationstabeller 6
3. Betaling af lånene i Storebæltsprojektet 8

1. Anlægsøkonomien og fordelingen af udgifterne på tog og biler

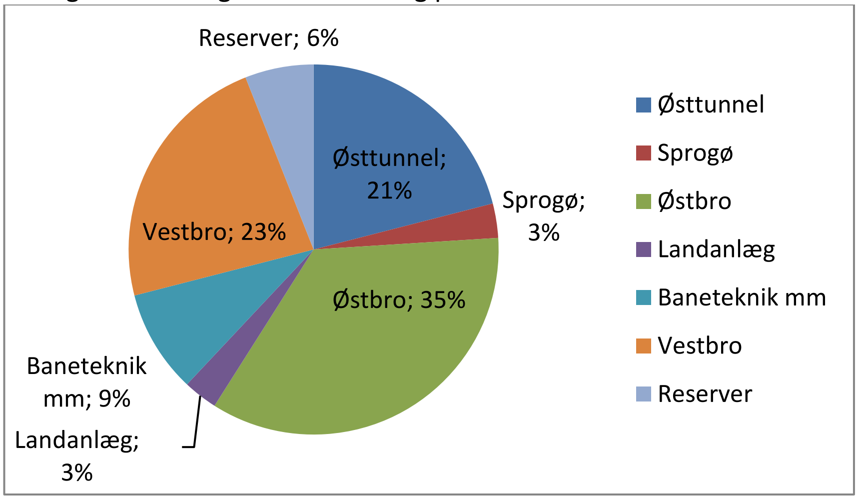
(*Talmaterialet i dette afsnit er hentet fra A/S Storebælts årsberetninger fra midt i 90'erne*).
I 1986 vedtog Folketinget, at der skulle anlægges en fast forbindelse over Storebælt og året efter blev A/S Storebælt dannet. I et land som Danmark, med de mange øer, sunde og bælter, har infrastruktur og transport mellem landsdelene altid været et politisk tema.

100 år var der blevet etableret regelmæssig sejlads med jernbanefærger mellem Korsør og Nyborg, som plakaten illustrerer.

50 år før havde et konsortium af ingeniører fremlagt forslag til en bro over Storebælt, som det fremgår af avisudklippet fra 1936. Det var givetvis inspireret af den netop etablerede bro over Lillebælt. Men det skulle altså tage yderligere 50 år.

I 1991 er A/S Storebælt klar med hele projektet til bygning af tunnelen, de to broer og landanlæggene. I projekt nr. 4.4, *Tunnelboringen under Storebælt* er projektet omtalt i større detaljer.

Da kontrakterne er indgået er det samlede budget på 22,7 mia. kr. (i priser angivet i 1992-kroner).
Anlægsomkostningerne fordeler sig på de enkelte elementer som illustreret i cirkeldiagrammet:



Administrationsomkostninger er inkluderet heri. Reserverne, der var afsat, var meget beskedne, og det skulle vise sig at budgettet langt fra kunne holde.

Anlægsomkostningerne blev lånefinansieret. Men hvordan skulle lånene betales tilbage?
Det var fra starten bestemt, at udgifterne skulle betales af de, der brugte anlægget, dvs. af DSB og af bilisterne, der kører over broen. Budgettet for finansieringen var baseret på en åbning af jernbaneforbindelsen i slutningen af 1994 og af vejdelen i slutningen af 1997. Af forskellige årsager blev hele projektet forsinket. Togforbindelsen gennem tunnelen og over Vestbroen åbnede i juli 1997 og i samme måned året efter kunne biler køre mellem Sjælland og Fyn over Østbroen og Vestbroen.

DSB skal betale den del af anlægget, der kan henføres til baneforbindelsen, og bilisterne skal betale den del af udgifterne, der kan henføres til vejforbindelsen. Fordelingen af udgifterne bestemmes derfor af følgende:

- Østbroen benyttes udelukkende af biler
- Østtunnellen benyttes udelukkende af tog
- Vestbroen benyttes stort set lige meget af tog og biler
- Landanlægget er lavet udelukkende for bilisterne
- De banetekniske arbejder er lavet udelukkende for tog
- Anlægget på Sprogø til biler og til tog har kostet stort set samme beløb
- Tog og biler skal bidrage ligeligt til reserverne.

ISBN 9788770668279

Øvelse 1

a) Hvor mange procent af anlægsomkostningerne skal betales af DSB og hvor mange procent skal betales af bilisterne?

b) Hvor stort et beløb skal DSB finansiere og hvor stort et beløb skal bilisterne finansiere?

De beløb, vi har udregnet i øvelse 1, skal lånefinansieres. Før vi kan regne videre på det, skal vi have styr på hvad annuitetslån er og hvordan vi regner på sådanne låneformer.

2. Formler til beregning af opsparing og gæld

Under emnet procentregning i kapitel 4 afsnit 2.1 viste vi følgende formel, der ofte kaldes kapitalfremskrivningsformlen:

> Formel nr. 3 til procentregning
> Hvis en startværdi K_0 vokser (eller aftager) med vækstraten *r* gennem *n* perioder så kan slutværdien *K* udregnes således:
> $$K = K_0 \cdot (1+r)^n \, .$$

2.1 Opsparingsannuitet

Når man sparer op, fx for at have en udbetaling til at kunne købe en ejerlejlighed, sker det ofte ved at man indsætter et bestemt beløb på en særlig konto hver måned eller hvert år. Vi bruger ofte ordet *termin* som et fælles ord for denne periode: Vi indsætter altså et fast beløb hver termin.

Lad os kalde det faste beløb, der indsættes hver termin, for *b*.
Lad os kalde renten, vi får på denne opsparingskonto, for *r*. Vi skriver *r* som decimaltal.

Efter 1. termin er det første beløb ifølge formel nr. 3 vokset til $b\cdot(1+r)$
Samtidig indsættes et nyt beløb *b*.
Efter 1. termin står der således på kontoen:

$$A_1 = b + b\cdot(1+r)$$

Efter 2. termin er det første beløb ifølge formel nr. 3 vokset til $b\cdot(1+r)^2$
Det nye beløb *b*, vi indsatte er vokset til $b\cdot(1+r)$
Samtidig indsættes et nyt beløb *b*.
Efter 2. termin står der således på kontoen:

$$A_2 = b + b\cdot(1+r) + b\cdot(1+r)^2$$

Øvelse 2

Argumenter for, at der efter 3. termin står følgende beløb på kontoen:

$$A_3 = b + b\cdot(1+r) + b\cdot(1+r)^2 + b\cdot(1+r)^3$$

Øvelse 3

Argumenter for, at der efter *n*. termin står følgende beløb på kontoen:

$$A_n = b + b\cdot(1+r) + b\cdot(1+r)^2 + b\cdot(1+r)^3 + \ldots + b\cdot(1+r)^n$$

Dette udtryk kan vi omskrive til en formel, hvor vi lettere kan bestemme ukendte størrelser – ligesom vi kan med kapitalfremskrivningsformlen. Omskrivningen udnytter en formel, som blev vist i kapitel 0 afsnit 2:

ISBN 9788770668279

Sætning 3
For ethvert positivt helt tal n og for ethvert tal $a \neq 1$ gælder

$$1 + a + a^2 + a^3 + \ldots + a^n = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$$

Vi omskriver:

$$A_n = b + b \cdot (1+r) + b \cdot (1+r)^2 + b \cdot (1+r)^3 + \ldots + b \cdot (1+r)^n$$

$$A_n = b \cdot (1 + (1+r) + (1+r)^2 + (1+r)^3 + \ldots + (1+r)^n)$$ sæt b udenfor parentes

$$A_n = b \cdot \frac{(1+r)^{n+1} - 1}{(1+r) - 1}$$ udnyt sætning 3 med a = 1+r

$$A_n = b \cdot \frac{(1+r)^{n+1} - 1}{r}$$ reducér

En opsparing, hvor vi betaler et fast beløb ind på en konto hver termin, og hvor vi er garanteret samme rente i opsparingsperioden, kaldes en *annuitetsopsparing*. I den endelige formel skriver vi ofte blot A:

Formel for opsparingannuitet
Hvis der hver termin indsættes et fast beløb b på en konto, hvor renten er r, så vil det samlede beløb på kontoen efter den n. indbetaling være:

$$A = b \cdot \frac{(1+r)^{n+1} - 1}{r}$$

Bemærkning nr. 1: Tallet r skal altid skrives som et decimaltal.
Bemærkning nr. 2: Sparer vi op i 3 når foretager vi 4 indbetalinger. Sparer vi op i 10 år foretager vi 11 indbetalinger. Overvej det!

Øvelse 4
Et par, der lige er flyttet sammen, beslutter sig til at indsætte 8.000 om året på en konto, hvor renten er 3,75 %.
a) Hvor stort et beløb står der på kontoen efter den 7. indbetaling?
b) Hvor stor en del af dette beløb er tilskrevne renter?

Øvelse 5
Et andet par får tilbudt samme opsparingskonto. De sætter sig som mål at spare 100.000 kr. op i løbet af 5 år. Hvor meget skal de spare op om året?

Øvelse 6
Et tredje par får også tilbudt denne opsparingskonto. De kan afsætte 12.000 om året til opsparing. De ønsker at spare 140.000 kr. op. Hvor mange år vil det tage?

Øvelse 7
Et fjerde par læser et lokkende tilbud fra en bank, de aldrig før har hørt om. Banken skriver i en annonce, at indsætter du hos dem 10.000 om året i 5 år, og binder du pengene på kontoen i hele perioden, så får du udbetalt 100.000 efter de 5 år.

a) Hvilken rente tilbyder denne bank?
b) Vil du betro banken dine penge?

2.2 Gældsannuitet

Når man skal købe hus eller ny bil har man sjældent mulighed for på kort tid at spare hele beløbet op. Derfor låner man. Det samme gør stater, når de skal finansiere et underskud på statens budget, eller når de skal sætte store byggeprojekter i gang. Bygning af Storebæltsforbindelsen er så kostbar, også for en stat, at man vælger at lånefinansiere det.

Men lån skal betales tilbage. Den traditionelle lånetype i Danmark har i over hundrede år været de såkaldte *annuitetslån*. Tanken her er den samme som ved opsparing, bare modsat:

- Vi har en gæld, som vi kalder for G, der skal afdrages.
- En kreditforening eller anden långiver tilbyder en fast rente r i hele afdragsperioden.
- Lånet betales ud i løbet af en aftalt periode. Lad os kalde dette for n terminer
- Ud fra dette beregnes størrelsen af den faste ydelse y, der skal betales hver termin.

Som ved *opsparingsannuitet* ønsker vi nu at finde en formel for *gældsannuitet*, der kæder de 4 størrelser sammen.

For bedre at kunne overskue situationen forestiller vi os nu, at vi i kreditforeningen har to konti:

1) En konto, hvor vores gæld bogføres. Denne konto starter med beløbet G. Beløbet vokser termin for termin som beskrevet i formel nr. 3.
2) En konto, hvor vi indbetaler den faste ydelse y hver termin. Vi starter med at indbetale efter 1. termin. Denne konto kan jo så betragtes som en opsparingskonto, hvor beløbet vokser som beskrevet i formlen for annuitetsopsparing.

Situationen er altså følgende:

	Gæld	**Opsparing**
Start	G	0
efter 1. termin	$G\cdot(1+r)$	y
efter 2. termin	$G\cdot(1+r)^2$	$y+y(1+r)$
osv.		

Vi er gældfrie, når beløbene i de to konti balancerer. Så er vores samlede indbetaling med tilskrevne renter vokset til et beløb, der svarer til det gælden er vokset til. Hvis dette er tilfældet efter n terminer, så gælder der:

$$\text{gæld} = \text{opsparing}$$

$$G\cdot(1+r)^n = y\cdot\frac{(1+r)^n-1}{r}$$

Overvej hvorfor der står n og ikke n+1 på højre side

Af og til foretrækker vi en formel, hvor G er isoleret. Så skal størrelsen på højre side divideres med $(1+r)^n$. At dividere med $(1+r)^n$ svarer til at gange med $(1+r)^{-n}$. Overvej dette, fx med taleksempler.

Øvelse 8

Vis, at formlen, hvor G er isoleret, kan skrives:

$$G = y\cdot\frac{1-(1+r)^{-n}}{r}$$

Andre gange foretrækker vi en formel hvor y er isoleret.

Øvelse 9

Vis, at formlen, hvor y er isoleret, kan skrives:

$$y = G \cdot \frac{r}{1-(1+r)^{-n}}$$

Formel for gældsannuitet

En gæld af størrelsen G står til en fast rente på r. Gælden betales tilbage i løbet af n terminer med en fast ydelse på y kroner.

Sammenhængen mellem de 4 størrelser kan udtrykkes ved formlerne:

1) $G = y \cdot \frac{1-(1+r)^{-n}}{r}$ 2) $y = G \cdot \frac{r}{1-(1+r)^{-n}}$

Bemærkning: Tallet r skal altid skrives som et decimaltal.

Øvelse 10

Den samlede pris for en bestemt computer løber op i 4249. Du vil købe den på afbetaling med månedlige ydelser. Renten er 2 % pr måned. Du vælger at betale over 3 år.

a) Hvad bliver ydelsen?
b) Hvor meget vil du i alt have betalt i renter

Øvelse 11

Et par vil købe en ejerlejlighed. De foretrækker et annuitetslån, hvor renten ligger fast i 30 år. Ejendomsmægleren siger at lige nu vil renten ligge på ca. 4,5 %. De har vurderet, at de kan klare en månedlig husleje på 9000 kr., eller en årlig husleje på ca. 100.000. Hvor dyr en lejlighed kan de købe?

2.3 Amortisationstabeller

Ofte er man interesseret i at får svar på, hvor stor en restgæld man har efter et vist antal terminer. Køber man fx en lejlighed, vil man normalt af sin bank eller af sin ejendomsmægler få et skema med en sådan oversigt. Dette kaldes en *amortisationstabel.*

En amortisationstabel bygges forholdsvis let op i et regneark. I nogle bestemte celler indskrives:

- Gæld, der ofte betegnes med det gamle ord *hovedstol*. Skrives fx i B2
- Rente. Skrives fx i B3 (som decimaltal).
- Antal terminer. Skrives fx i B4

I en fjerde celle, fx i B5 skrives formlen til beregning af ydelsen. Denne kan enten skrives som formlen ovenfor, med ændrede symboler:

$$= B2 \cdot \frac{B3}{1-(1+B3)^{-B4}}$$

Eller man kan i regnearkets funktioner, blandt de finansielle operationer finde en der hedder *ydelse* og anvende den.

Øvelse 12

a) Indskriv oplysningerne i øvelse 9 i et regneark som beskrevet ovenfor. I A-kolonnen kan du indskrive, hvad beløbene står for, dvs.: Gæld, Rente, Antal terminer. Når du indskriver formlen, så husk at starte med et lighedstegn som ovenfor.
b) Prøv dernæst at ændre på de tre parametre, gælden G, renten r, antal terminer n, en af gangen, og se hvad der sker med ydelsen y

Når vi har fastlagt gæld, rente og antal terminer, og når vi har udregnet ydelsen, kan vi opbygge amortisationstabellen, fx som følger, hvor vi henter samlede gæld, renter og ydelse i de celler, hvor vi har skrevet dem ind (her i B2, B3 og B5). Disse beløb hentes hele tiden fra samme celler, derfor sætter vi $-tegn rundt om dem:

	A	B	C	D	E	F
1						
…	…	…	…	…	…	…
13	nr. på termin	gæld	rente	afdrag	ydelse	slut gæld
14	1	=B2	=B14*B3	=E14-C14	=B5	=B14-D14
15	2	=F14	…	…	…	…
…	…	…	…	…	…	…

Øvelse 13

a) Hvad skal der stå i række nr. 15?
b) Hvad skal der stå i række nr. 16?
c) Hvad sker der, hvis vi kopierer række 15 og sætter ind i række 16, 17 osv.?
d) Forklar igen hvorfor vi sætter $-tegn om nogle cellenavne og ikke om andre.

Øvelse 14

a) Byg dit regneark fra øvelse 11 ud til en amortisationstabel med 36 rækker
b) Hvad er restgælden i den sidste række?
c) Hvad er restgælden efter 18 terminer dvs. efter halvdelen af perioden?

Øvelse 15

Du kan finde et regneark med amortisationstabel **her**.
Regnearket er udbygget med nogle kommandoer, der gør, at du kan indtaste forskellige antal terminer (op til n = 80), hvorefter arket beregner præcis det antal vi har bedt om, Samtidig tegnes et grafisk billede af situationen.
Giv en fortolkning af det grafiske billede.

Øvelse 16

Regneark med amortisationstabeller kan anvendes som redskab til at bestemme ukendte størrelser, ved at vi prøver os frem, dvs. skruer på den ukendte størrelse, indtil ”det går op”

a) Forklar hvordan en sådan tabel kan anvendes til at løse øvelse 10 ovenfor.
b) Forklar hvordan en sådan tabel kan anvendes til at løse opgaver med ukendt rente. Giv selv et eksempel og illustrer med brugen af tabellen.
c) Forklar hvordan en sådan tabel kan anvendes til at løse opgaver med ukendt antal terminer. Giv selv et eksempel og illustrer med brugen af tabellen.

ISBN 9788770668279

3. Betaling af lånene i Storebæltsprojektet

Vi vender nu tilbage til spørgsmålet vedrørende finansiering af anlægsomkostninger ved Storebæltsforbindelsen, hvor vi i øvelse 1 fandt ud fa, hvor store beløb henholdsvis DSB og bilisterne skal betale. Der var følgende rammer for finansieringen:

- Til dækning af DSB's udgifter optages et annuitetslån, der skal betales tilbage over 30 år med 725 mio. hvert år (dvs. 0,725 mia.)
- Til dækning af bilisternes udgifter optages et annuitetslån, som skal betales tilbage med de penge som opkræves af bilisterne, der kører over broen.
- Man regner med, at der kører ca. 12500 personbiler og ca. 2500 lastbiler og busser over broen pr. døgn.
- Der regnes med en broafgift på 190 kr. for personbiler og 800 kr. for lastbiler og busser.
- Den årlige rente er på 10 % (i 1992)

Øvelse 17

Hvilken rente skal DSB betale for det 30 årlige lån? Løs det enten på dit værktøjsprogram, eller ved at anvende det udleverede regneark til at lave en amortisationsplan for afvikling af lånet.

Øvelse 18

Hvor mange penge kan bilisterne betale af på deres lån pr år?

Øvelse 19

Hvor mange år går der, før bilisterne har betalt hele deres lån tilbage? Løs det enten på dit værktøjsprogram, eller ved at lave en amortisationsplan for afvikling af bilisternes lån.

Øvelse 20

Hvor mange år går der, før bilisterne har betalt deres lån tilbage, hvis de skal betale samme rente som DSB? Lav en amortisationsplan.

Anlægsudgifterne blev betydeligt større end budgetteret med i 1992. Da broen åbnede i 1997 var det samlede anlægsbudget steget til 38 mia. kr.

Øvelse 21

a) Hvor mange procents stigning er der tale om?
b) Hvor mange procent svarer dette til pr. år?

Øvelse 22

De 38 mia. kr. fordeles efter samme procenter som det oprindelige beløb.
Hvor mange mia. skal henholdsvis DSK og bilisterne betale af det endelige beløb på 38 mia. kr.?

Broafgifterne blev ved broens åbning også sat lidt højere end oprindeligt planlagt – en personbil skulle betale 210 kr. og en lastbil 870 kr.
Antallet af biler der benytter Storebæltsbroen er derimod stort set som prognoserne forudsagde.

ISBN 9788770668279

Øvelse 23
Hvor mange penge kan bilisterne betale af på deres lån pr år med de nye takster?

Øvelse 24
Undersøg ved hjælp af formlen for gældsannuitet eller ved brug af amortisationsplanen, hvordan situationen er for bilisternes afvikling af deres del af gælden.
Hvad er din forklaring på de resultater dine udregninger giver?
Prøv at forklare, hvad der kan ligge i begrebet ”lide rentedøden”.

A/S Storebælt overlevede fordi renten sidst i 90’erne begyndte at falde.

Øvelse 25
Find ud af hvordan situationen er i dag:
Hvor stor er den daglige biltrafik over Storebælt?
Hvad er den normale afgift peronbiler og lastbiler skal betale?
Hvad er renten i dag (i cirkatal) på sådanne lån, hvor der er sikkerhed for, at de betales?