ISBN 9788770668279

Projekt 3.1 Potensbegrebet og geometriske rækker

(*Vi tager i det følgende udgangspunkt i kapitalfremskrivningsformlen:* $K = K_0 \cdot (1+r)^n$)

I formlen for kapitalfremskrivning er situationen den, at den kapital, der står på saldoen, fremskrives med en fast procent *r*, hver gang antallet af terminer vokser med 1. Vi beviste under afsnittet om procentregning, at det netop svarer til, at vi ganger startværdien på saldoen med den faste fremskrivningsfaktor $a = 1+r$, hver gang *n*-værdien vokser med 1. En sådan vækst-type kan derfor også karakteriseres som værende en gangevækst. I kapitel 4 vil vi betegne den som eksponentiel vækst. Temaet for dette projekt er: Hvordan udvides potensbegrebet, så formlen giver mening ikke blot for et helt antal terminer, men for enhver brøkdel af en termin.

Vækstmodeller, der kan karakteriseres som gangevækst, har en historie, der rækker meget længere tilbage end rentesregningen. Tidligere var de kendt under navnet *geometriske rækker*, der netop er karakteriseret ved en startværdi og en fast vækstfaktor. Hvis fx startværdien er 3 og vækstfaktoren er 2, fører det til den geometriske række (som vi skriver med moderne tabelnotation):

x	0	1	2	3	4	5	…
y	3 (=startværdi)	6 (= 3·2)	12 (= 6·2)	24 (= 12·2)	48 (= 24·2)	96 (= 48·2)	…

Øvelse 1
Udfyld de følgende tabeller for geometriske rækker, idet du først prøver at afkode, startværdi og vækstfaktor.

a)

x	0	1	2	3	4	5	…
y	4	12					…

b)

x	0	1	2	3	4	5	…
y			8	16			…

c)

x	0	1	2	3	4	5	…
y			8		72		…

d)

x	0	1	2	3	4	5	…
y		5			40		…

Hvis vi generelt kalder startværdien for *b* og vækstfaktoren for *a*, fås den følgende tabel:

x	0	1	2	3	4	5	…
y	b	$b \cdot a$ $(= b \cdot a)$	$b \cdot a^2$ $(= b \cdot a \cdot a)$	$b \cdot a^3$ $(= b \cdot a \cdot a \cdot a)$	$b \cdot a^4$ $(= b \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a)$	$b \cdot a^5$ $(= b \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a)$	…

Vi ser derfor, at den generelle formel for en geometrisk række også kan skrives på formen

$$y = b \cdot a^x$$

med startværdien *b* og vækstfaktoren *a*.

Læg mærke til hvordan den ligner formlen for kapitalfremskrivning:

$$K = K_0 \cdot (1+r)^n$$

med startværdien K_0 svarende til *b*, og fremskrivningsfaktoren $(1+r)$ svarende til vækstfaktoren *a*.

Udvidelse af potensbegrebet med negative potenser

Vi vender for en kort stund tilbage til tabellen for eksponentiel vækst. Her ser vi nu for simpelhedens skyld på et eksempel med startværdi 1 og vækstfaktor 2:

x	0	1	2	3	4	5	...
$y=2^x$	1	2	4	8	16	32	...

$\cdot 2$ $/2$

Hver gang vi går et skridt til højre, ganger vi med 2. Men heraf følger jo også, at hver gang vi går et skridt til venstre, dividerer vi med 2. Vi kan derfor fortsætte tabellen til venstre og tilbageskrive tabellen forbi startpunktet:

x	...	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	...
$y=2^x$	...	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	32	...

Men denne tabel kan jo også læses som en udvidelse af to-talspotenserne, der åbenlyst sker efter reglen $2^{-n} = \frac{1}{2^n}$ eller mere generelt $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

Reglen passer også ind i den mere generelle struktur for geometriske rækker. Hvis vi går et skridt frem i tabellen, ganger vi med *a*, går vi to skridt frem i tabellen, ganger vi med a^2, går vi *n* skridt frem i tabellen, ganger vi med a^n. Men nu ser vi, at reglen både gælder for positive og negative værdier af *n*, idet et negativt *n* blot betyder at vi går baglæns, dvs. tilbage i tabellen.

Denne forståelse af de negative eksponenter kaster også lys over *kapitaltilbageskrivning*, dvs. hvordan vi finder tilbage til startkapitalen K_0, når vi kender slutkapitalen *K*:

$$K = K_0 \cdot (1+r)^n$$
$$K_0 = \frac{K}{(1+r)^n}$$

Prøver vi at finde startkapitalen K_0 ved hjælp af et CAS-værktøj finder vi typisk

$$solve(K = K_0 \cdot (1+r)^n, K_0)$$
$$K_0 = K \cdot (1+r)^{-n}$$

dvs. CAS-værktøjet udfører tilbageskrivningen af slutkapitalen *K* ved at gange med $(1+r)^{-n}$, hvilket er i fuld overensstemmelse med potensregneregel nr. 7 i grundbogens afsnit 3.

Udvidelse af potensbegrebet med halve

Vi kan også bruge den samme ide til at finde ud af, hvad der skal stå i tabellen, hvis vi indskyder mellemværdier. Dette problem har en lang historie bag sig og løsningen har været kendt siden den græske matematik.

Vi bemærker først, at der gælder følgende regel for en geometrisk række: Hvis et tal *m* står *midt mellem* tallene *v* (til venstre for *m*) og *h* (til højre for *m*) så gælder der om de tilsvarende tal i den geometriske række, at $y(m)=\sqrt{y(v)\cdot y(h)}$. y(*m*) kaldes derfor *det geometriske middeltal* af y(*v*) og y(*h*).

Se på følgende eksempel. I den geometriske række svarer tallet 6 til nummer 1, der er midt mellem 0 og 2. 0 og 2 svarer til tallene 3 og 12:

x	0	1	2	3	4	5	…
y	3	6	12	24	48	96	…

Og tallet 6 er netop kvadratroden af tallet 3·12=36. Dette er jo ikke et bevis, men en illustration. Prøv selv at kontrollere med en række andre eksempler fra de potensrækker du har udregnet. Selv om du finder, at det gælder også i de tilfælde, kræver påstanden naturligvis et bevis.

Øvelse 2

Se på den generelle tabels gangestruktur:

x	0	1	2	3	4	5	…
y	b	$b\cdot a$	$b\cdot a^2$	$b\cdot a^3$	$b\cdot a^4$	$b\cdot a^5$	…

Tallet 4 står midt mellem 3 og 5. Dvs. *v* svarer til $b\cdot a^3$, og $b\cdot a^5$ svarer til *h*.

a) Vis nu, at *y*-værdien svarende til 4, dvs. $b\cdot a^4$ er lig med $\sqrt{y(v)\cdot y(h)}$.

b) Vi at reglen også gælder for tal med større afstand, fx for tallene 1, 3 og 5.

Lad os se hvordan dette kan begrunde endnu en udvidelse af potensbegrebet.

Vi vender tilbage til tabellen over to-talspotenserne. Når vi ønsker at indskyde mellemværdier i tabellen, svarer det til, at vi indfører halve skridt i tabellen og dermed halvtallige eksponenter:

x	…	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3	$\frac{7}{2}$	4	$\frac{9}{2}$	5	…
$y=2^x$	…	1		2		4		8		16		32	…

$\cdot k_{½}$ $\cdot 2$

Da der er tale om en gangevækst, må vi forvente at vi ganger med en bestemt vækstfaktor $k_{½}$ for hver gang vi går et halvt skridt frem i tabellen, men vi ved jo, at hver gang vi tager et helt skridt, skal vi gange med 2, og da to halve skridt netop svarer til et helt skridt, betyder det, at der må gælde $k_{½}\cdot k_{½}=2$ dvs. ${k_{½}}^2=2$ og dermed $k_{½}=\sqrt{2}$. Vi kan derfor udfylde den ovenstående tabel ved successivt at gange med $\sqrt{2}$:

x	…	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3	$\frac{7}{2}$	4	$\frac{9}{2}$	5	…
$y=2^x$	…	1	$\sqrt{2}$	2	$2\sqrt{2}$	4	$4\sqrt{2}$	8	$8\sqrt{2}$	16	$16\sqrt{2}$	32	…

$\cdot\sqrt{2}$

ISBN 9788770668279

Grafisk præsentation af potensudvidelsen - som perler på en snor.
Gå ind i dit regneark og opret en lodret liste over tallene 0, 1, 2, 3 og 4. Udregn de tilhørende 2-talspotenser ved at tildele 0 startværdien 1 og dernæst lade hvert af de følgende tal være produktet af tallet i den foregående celle med vækstfaktoren 2. Afbild den fremkomne tabel grafisk: Dette er starten på grafen for funktionen $y = 2^x$.

Indskyd nu rækker i tabellen svarende til eksponenterne 0, 1/2, 1, 3/2, 2, 5/2, 3, 7/2 og 4. De nye 2-talspotenser er udefinerede i tabellen, fordi vi jo kun har fortalt, hvad der sker, når vi går et helt skridt frem i tabellen.

Vi fylder derfor hele tabellen ved at tildele cellen efter startværdien værdien af tallet i den foregående celle ganget med kvadratroden af 2. derefter trækkes denne tildeling ned gennem hele cellen. Læg mærke til grafen!

Indskyd nu rækker i tabellen svarende til eksponenterne 0, 1/4, 1/2, 3/4, 1, 5/4,…, 15/4 og 4 og gå frem på samme måde idet du denne gang ganger med kvadratroden af kvadratroden af 2 svarende til et fjerdelsskridt osv. osv.

På denne måde kan du nu systematisk udfylde flere og flere punkter på grafen for funktionen $y = 2^x$.

Udvidelse af potensbegrebet med stambrøkerne – n'te dele
Kvadratrodsreglen passer også ind i den mere generelle struktur for geometriske rækker. Hvis vi går ét skridt frem i tabellen, ganger vi med a, går vi to skridt frem i tabellen, ganger vi med a^2, går vi n skridt frem i tabellen, ganger vi med a^n. Men nu ser vi, at hvis vi går et halvt skridt frem i tabellen, ganger vi med $\sqrt{a}$, fordi to halve skridt netop svarer til et helt skridt. Der gælder altså også en potensregneregel, der siger at $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$.

Tilsvarende vil tre tredjedele skridt i tabellen netop svarer til ét helt skridt, hvorfor den tilhørende fremskrivningsfaktor $k_{1/3}$ må opfylde $k_{1/3} \cdot k_{1/3} \cdot k_{1/3} = {k_{1/3}}^3 = 2$, hvorfor der må gælde $k_{1/3} = \sqrt[3]{2}$ og dermed $2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}$; og mere generelt $a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}$ … og endnu mere generelt $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$.

I 1525 havde Cristoph Rudolf indført kvadratrodstegnet $\sqrt{}$ som et forvansket r for rod. Kun ca. hundrede år efter lykkedes det på denne måde at få styr på potenserne og deres regneregler.

L&R Uddannelse EGMONT

Potensbegrebet og gennemsnitlig rente

Denne forståelse af rødder kaster også lys over renteformlen, dvs. hvordan vi finder tilbage til renten i én termin, når vi kender den samlede rentetilskrivning i n terminer:

$$K = K_0 \cdot (1+r)^n$$
$$1+r = \sqrt[n]{\frac{K}{K_0}}$$

Prøver vi at finde renten ved hjælp af et CAS-værktøj finder vi typisk

$$solve(K = K_0 \cdot (1+r)^n, r)$$
$$r = \left(\frac{K}{K_0}\right)^{\frac{1}{n}} - 1$$

dvs. CAS-værktøjet finder renten ved at opløfte til potensen 1/n i stedet for at udføre roddudragningen af den n'te rod, igen i fuld overensstemmelse med den fundne potensregneregel.