ISBN 978 87 7066 827 9

L&R
Uddannelse
EGMONT

Projekt 10.3
Terningens fordobling

Elementerne indeholder, hvad man kan deducere sig til og konstruere sig til ud fra de få givne aksiomer. Man kan derfor i en vis forstand sige, at al den viden, der er i Euklids Elementer, allerede ligger gemt nede i aksiomerne. Der er ikke tale om ny viden, vi skal blot afdække den. Dette syn på hvad matematik er, og i bredere forstand hvad sandhed er, demonstreres i Platons dialog Menon.

Men hvordan udvikler matematik sig da? For praksis viser, at der opstår nyt.
Det kan illustreres af de tre uløste problemer. Disse er følgende:

Kan man *alene ved hjælp af passer og lineal konstruere* en løsning på følgende:
1. *Terningens fordobling*. Givet en terning. Konstruér en ny terning med det dobbelte rumfang.
2. *Vinklens tredeling.* Givet en vinkel. Del den i tre lige store dele.
3. *Cirklens kvadratur*. Givet en cirkel. Konstruér et kvadrat, der har samme areal som cirklen.

Vi vil her se på det første problem. De andre vender vi tilbage til på A-niveau.

Øvelse 1
Argumenter for følgende:
Når der spørges: *kan man alene med hjælp af passer og lineal konstruere*…
så svarer det til at spørge, om disse problemer kan løses på grundlag af Euklids aksiomer.

Svarene på alle tre spørgsmål er: Nej det kan man ikke. Men det lukker ikke historien, tværtimod, det er som med eventyrene, hvor man siger …*en ny kan begynde*. Søgen efter svar skabte en ny matematik.

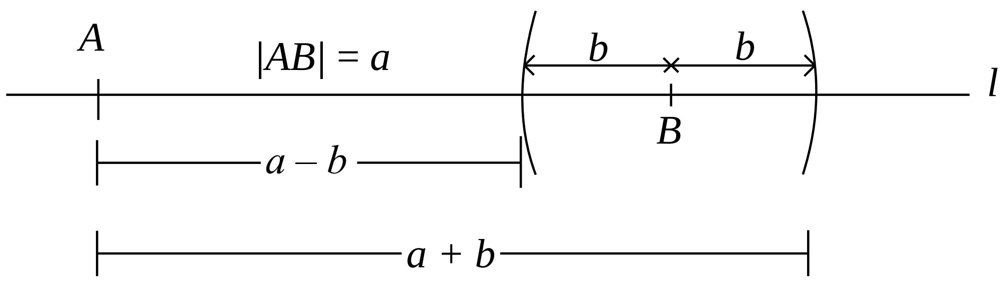
Geometrisk algebra
Vi skal nu se, hvorledes vi i geometrisk algebra opererer både med de fire regningsarter +, –, · og / og med $\sqrt{\ }$.

Lad være givet to positive tal *a* og *b*, $b \neq 0$, der begge repræsenteres af linjestykker med længderne *a* og *b*. Og lad endvidere være givet et linjestykke af længden 1.

Konstruktion af *a* + *b* og af *a* – *b* (hvis *a* > *b*)

Forlæng linjestykket *a* i en ret linje og tegn med centrum i et af *a*'s endepunkter en cirkel med radius *b*. Herved afskæres henholdsvis *a* + *b* og *a* – *b* på linjen:

ISBN 978 87 7066 827 9



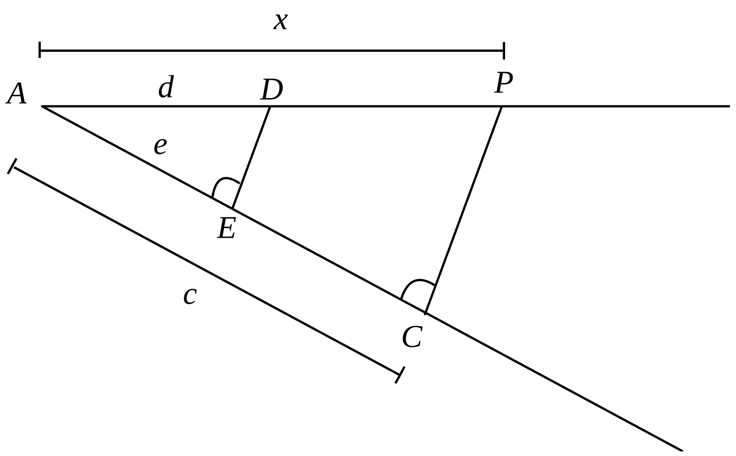
Konstruktion af a · *b* (konstruktion af »fjerdeproportionalen«)

Konstruktionen bygger på følgende forhold: $\frac{a \cdot b}{b} = \frac{a}{1}$

Sæt $a \cdot b = x$. Opgaven er en speciel udgave af den generelle konstruktion af <u>fjerdeproportionalen</u> *x* til tre kendte stykker *c*, *d* og *e*:

$$\frac{x}{c} = \frac{d}{e}$$

Det gøres som følger:



Afsæt i en vilkårlig vinkel stykket *d* ud ad det ene ben og *e* ud ad det andet. Forbind *DE*. Afsæt *c* ud ad samme ben som *e*, og tegn igennem punktet *C* en linje parallel med *DE*.

Øvelse 2

Gør det! – dvs. flyt vinklen $\angle AED$ ned i *C* (ved brug af ”passer og lineal”, som man kan i et værktøjs-program).

Nu er de to trekanter *AED* og *ACP* ensvinklede, og derfor gælder det ønskede:

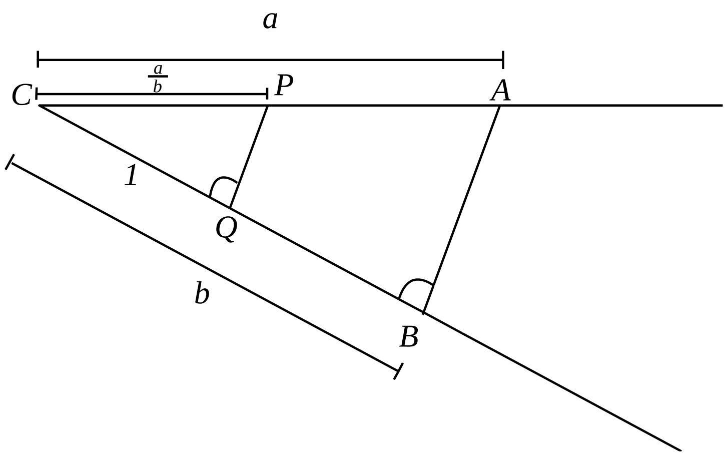
$$\frac{x}{c} = \frac{d}{e}$$

Øvelse 3
Udfør nu selv konstruktionen af $a \cdot b$.

Konstruktion af $\frac{a}{b}$

Konstruktionen bygger på følgende forhold: $\dfrac{a}{b} = \dfrac{\frac{a}{b}}{1}$

og udnytter metoden til konstruktion af fjerdeproportionalen, hvor $x = \dfrac{a}{b}$:



Trekant *ABC* er ensvinklet med trekant *PQC*, deraf det ønskede.

Terningens fordobling

Vi har givet en terning med sidelængde *a.* Den har rumfang a^3.
Kan vi ud fra *a* konstruere siden *b* i en terning med rumfang $2a^3$?

Med vore dages betegnelser er spørgsmålet:
Kan vi konstruere $b = a \cdot \sqrt[3]{2}$;
De græske matematikere kunne konstruere kvadratrødder, så hvorfor ikke tredjerødder.

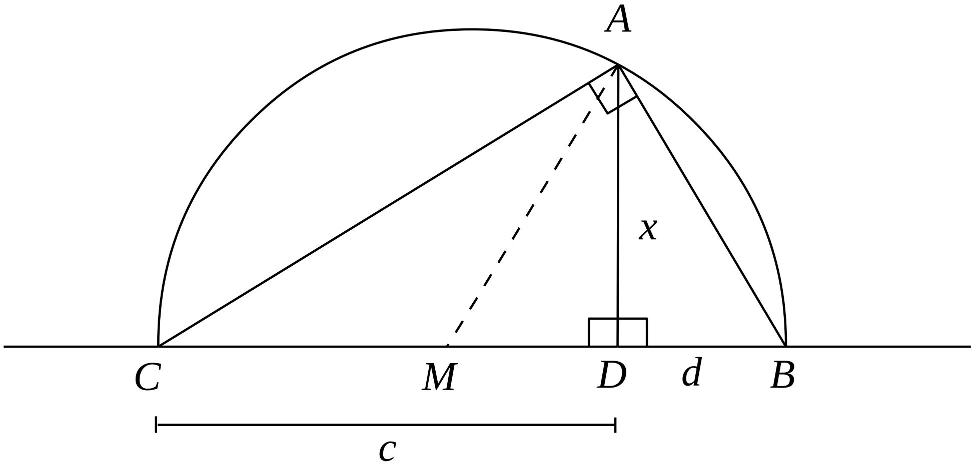
Konstruktion af kvadratrødder med passer og lineal

Konstruktionen af kvadratrødder er en speciel variant af den generelle konstruktion af *mellemproportionaler*:

$$\frac{x}{c} = \frac{d}{x}$$

ISBN 978 87 7066 827 9

Afsæt *c* og *d* i forlængelse af hinanden ud ad en ret linje, find midtpunktet *M* af dette linjestykke, og tegn med *M* som centrum og afstanden *MC* som radius en halvcirkel over *CB*. Oprejs i *D* den vinkelrette på linjen, og kald skæringspunktet med halvcirklen for *A*:



Øvelse 4

a) Vis at trekanterne *ABD* og *CAD* er ensviklede.

b) Vis at $$\frac{x}{c}=\frac{d}{x}$$

c) Argumenter for, at stykket *DA* bliver lig med $\sqrt{c\cdot d}$.

Øvelse 5

Anvend metoden ovenfor til at konstruere $\sqrt{3}$ og $\sqrt{2}$, idet du udnytter at $3=3\cdot 1$ osv.

Ifølge overleveringen viste matematikeren Hippokrates, at terningens fordobling svarer til problemet om at konstruere *to sammenhørende mellemproportionaler*, der går ud på følgende:
Givet linjestykkerne *a* og *d*. Konstruér to andre linjestykker *b* og *c*, så der gælder:

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}$$

Det er en nærliggende tanke, at vi kan løse dette, når vi kan konstruere almindelige mellemproportionaler.

Et argument for at Hippokrates har ret kunne være således:
Vi begynder med en terning med kantlængde *a*. Lad os et øjeblik sige, vi *kunne* konstruere en dobbelt så stor terning med kantlængde *b*. Kan vi gøre det én gang, kan vi også gentage det, så vi laver nu en terning dobbelt så stor som *b*-terningen, nu med kantlængde *c*. Så er det klart, at *c*'s forstørrelse i forhold til *b*, må være det samme som *b*'s forstørrelse i forhold til *a*. Altså:

$$\frac{c}{b}=\frac{b}{a}$$

Vi gentager processen, nu med *c*-terningen, der fordobles til en terning med kantlængde *d*. Igen må derfor gælde:

$$\frac{d}{c}=\frac{c}{b}$$

ISBN 978 87 7066 827 9

Men nu har vi jo fordoblet den oprindelige terning tre gange, så den er $2^3 = 8$ gange så stor som *a*-terningen. Derfor må den have kantlængden 2*a*, idet der jo gælder, at $(2a)^3 = 8a^3$. Altså:

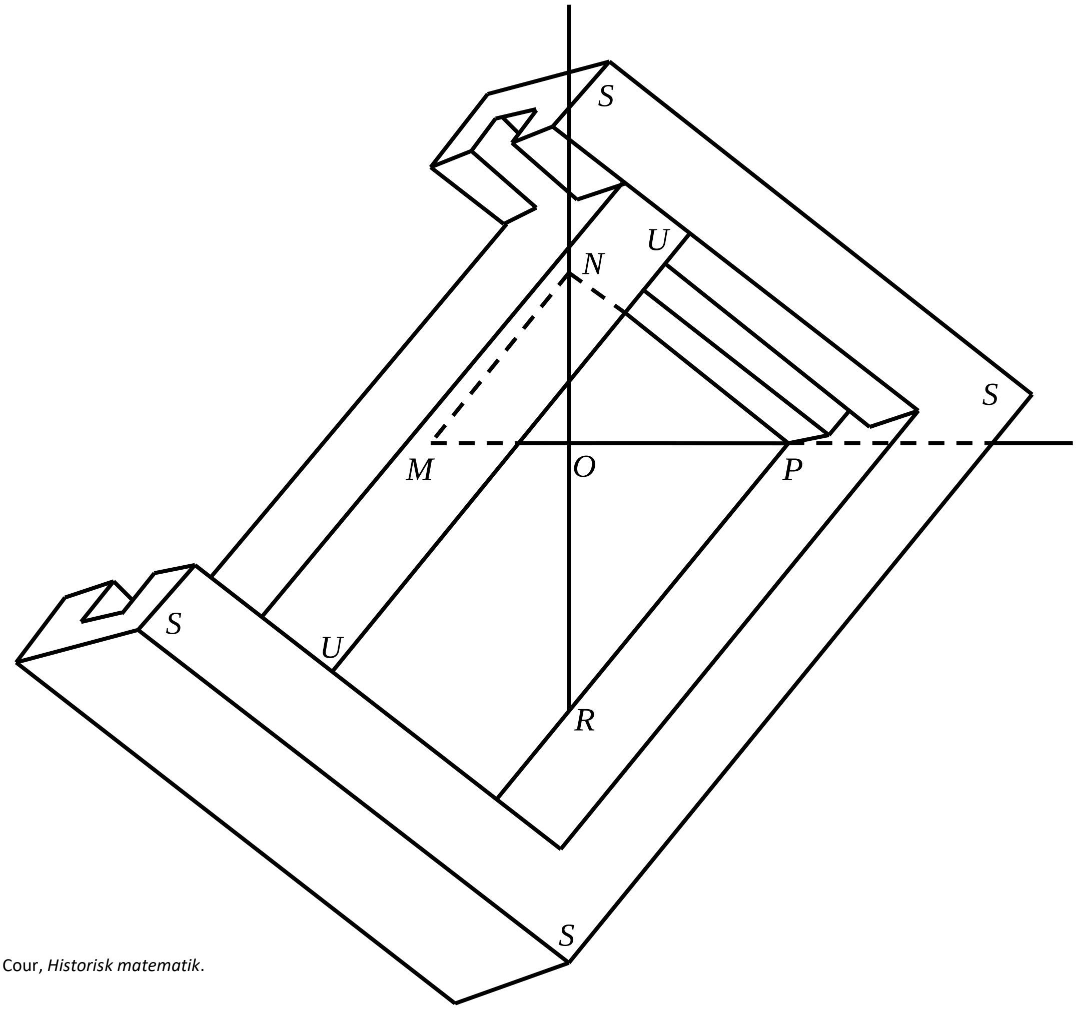
$$d = 2a$$

som indsættes i ligningen ovenfor, så vi alt i alt får:

$$\frac{2a}{c} = \frac{c}{b} = \frac{b}{a} \qquad (*)$$

a og 2*a* kender vi. *Konklusion:* Kan vi løse problemet med *konstruktion af sammenhørende mellemproportionaler*, er opgaven derfor løst. Det *b*, vi får i en sådan konstruktion, er den ønskede kantlængde.

Det skulle vise sig, at det heller ikke var muligt at løse denne udgave af problemet, alene med brug af passer og lineal. Men arbejdet var dog langt fra spildt. Dels kom der en række praktiske løsninger ud af det, som f.eks. følgende, der efter overleveringen skulle være det apparat, Akademiet konstruerede til løsning af det deliske problem:



Kilde: Poul La Cour, *Historisk matematik*.

ISBN 978 87 7066 827 9

Stykket *OM* er *a*, og stykket *OR* er 2*a*. I apparatet skydes *U*-stykket på plads, så det kommer til at ligge som vist på tegningen. Ved at se på ensvinklede trekanter finder vi så:

$$\frac{|OR|}{|OP|} = \frac{|OP|}{|ON|} = \frac{|ON|}{|OM|}$$

Sættes $|OP| = c$ og $|ON| = b$, står der altså $\dfrac{2a}{c} = \dfrac{c}{b} = \dfrac{b}{a}$.

Men vigtigere for matematikkens udvikling var det, at undersøgelser over »de sammenhørende mellemproportionaler« førte frem til opdagelsen af parabler, ellipser og hyperbler. Det var en anden af de store før Euklid, matematikeren Menaichmos (ca. 350 f.Kr.), der nåede frem til dette. Med moderne ligninger og koordinatsystemer er det let nok at se. Dengang var det uhyre kompliceret.

Øvelse 6
Vi ser på ligningen med de tre forhold og kalder de søgte stykker for *x* og *y* (mellemproportionalerne) og dem, vi kender, for *a* og *b*. Vi skal altså finde *x* og *y* ud fra følgende:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$$

Der står faktisk tre ligninger her:

1) $\dfrac{a}{x} = \dfrac{x}{y}$ 2) $\dfrac{x}{y} = \dfrac{y}{b}$ 3) $\dfrac{a}{x} = \dfrac{y}{b}$

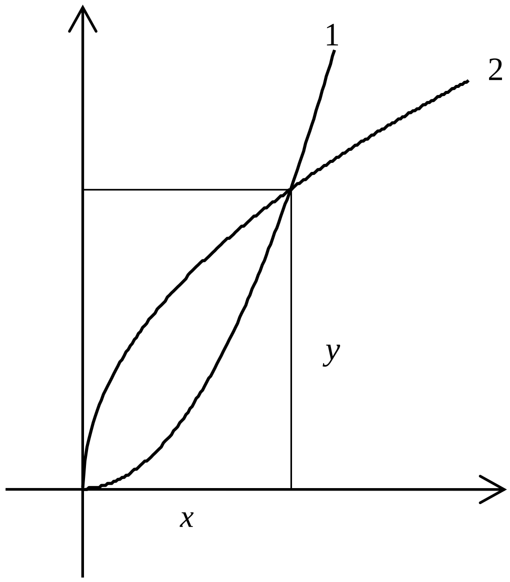
Omskriv disse til:

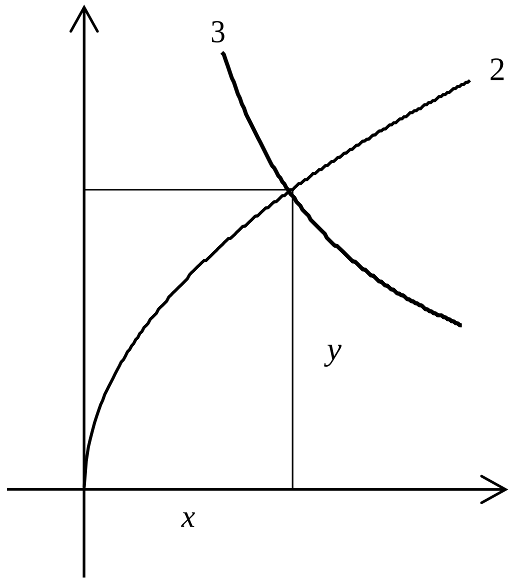
1) $y = \dfrac{1}{a} \cdot x^2$ 2) $x = \dfrac{1}{b} \cdot y^2$ 3) $y = a \cdot b \cdot \dfrac{1}{x}$

Disse ligninger fremstiller følgende kurver i koordinatsystemet:
1. Den første er en almindelig *parabe*l.
2. Den anden er en *parabel*, der »ligger ned«, dvs. den er symmetrisk om *x*-aksen.
3. Den tredje er en *hyperbel*.

Argumenter for, at dette betyder, at vi kan finde *x* og *y* som skæringspunkterne mellem to parabler 1) og 2) eller som skæringspunkt mellem en parabel og en hyperbel 1) og 3) eller 2) og 3):

ISBN 978 87 7066 827 9





Hermed var problemet oversat til følgende: Hvis vi kan konstruere parabler og hyperbler med passer og lineal, så kan vi også konstruere en løsning til terningens fordobling.

Vi kan imidlertid ikke tegne parabler og hyperbler alene med brug af passer og lineal. Men et nyt område af geometrien var under udvikling. Godt 100 år senere var denne teori allerede drevet så vidt, at en af den tredje store matematiker i oldtiden (ved siden af Euklid og Archimedes), nemlig Appolonius (262 – 190 fvt.) kunne skrive et værk om keglesnittene, der var lige så imponerende på sit felt, som *Elementerne*.

Øvelse 7. Arklimedes krigsmaskiner og uddragning af den tredje rod

Platons akademi fulgte maskinsporet med deres løsning og konstruktionen af det sindrige apparat. Det skulle viser sig, at dette værktøj fandt videre anvendelser helt andre steder. Archimedes er i historien blandt meget andet kendt for sine bidrag til at udvikle krigsmaskiner, hvormed grækerne kunne forsvare sig mod de ekspanderende romere. Arklimedes boede selv i en græsk koloni på Sicilien. Han konstruerede fx katapulter. Men hvordan gør man disse mest effektive. I arbejdet med dette optræder pludselig problemnet: At finde det tredje rod. Og i arbejdet med at løse dette inddrages et værktøj som det ovenfor gengivne. Du kan læse om denne fantastiske historie i en artikel fra Scientific American, som du kan finde **her.**