

Projekt 10.2 Den euklidiske tankegang i europæisk kulturhistorie

Næst efter Bibelen er *Euklids Elementer* den bog, der er mest udbredt og som er oversat til flest sprog. Den metode, vi finder i Euklids Elementer kaldes *den aksiomatisk-deduktive metode*. Metoden blev i oldtiden formuleret i sin reneste form af Euklid, der levede og virkede i Aleksandria ca. 300 fvt., men Euklid sammenfatter blot, hvad der i den græske kulturkreds gennem flere hundrede år er udkrystalliseret som normer for videnskab og ræsonnement. Metoden kan i forskellige udtryksformer findes i litteratur og kunst, i retorik og filosofi i det græske samfund.

Euklids Elementer blev den vigtigste undervisningsbog indenfor geometri, da bogen vendte tilbage til Europa efter middelalderens kulturelle formørkelse. Geometri blev et obligatorisk fag for al videregående skoleundervisning og kom også til at indgå i alle universitetsstudier. Enhver der startede på et europæisk universitet efter 1200-tallet skulle tage 7 obligatoriske fag, 4 indenfor naturvidenskab – astronomi, geometri, aritmetik og musik, der udgjorde det såkaldte kvadrivium – og 3 indenfor de humanistiske videnskaber – retorik, grammatik og dialektik, der udgjorde det såkaldte trivium. Det betyder, at enhver der tog en universitetseksamen, om det var som teolog eller læge eller indenfor jura eller naturvidenskab havde studeret både Euklid og Aristoteles.

Dermed kom den euklidiske tankegang til at påvirke hele den europæiske kulturkreds. Med *euklidisk tankegang* menes den måde at ræsonnere på, hvor man bygger på en række (mere eller mindre klart formulerede) definitioner og aksiomer, og hvor ny naturvidenskabelig, filosofisk eller samfundsvidenskabelig indsigt udledes (deduceres) logisk ud fra de oprindelige aksiomer. De grundlæggende definitioner og aksiomer sætter også rammen for arkitektur og for kunstnerisk aktivitet.

I det følgende gives i øvelsesform en række eksempler på, hvordan den euklidiske tankegang har påvirket den europæiske kulturkreds – fra hundreder af år før Euklid til vore dage. Vælg selv ud blandt disse eksempler, hvad der kan passe naturligt ind i et fagligt samarbejde. Eller inddrag et eller flere af disse eksempler som illustration i matematikundervisningen

Øvelse 1. Homers Iliaden og Odysseen

Homers *Iliaden* og *Odysseen* er skrevet i den samme kulturkreds som siden frembragte matematikken. De to store fortællinger er skrevet på vers efter ganske bestemte principper, såkaldte heksametre. Også Otto Steen Dues nyoversættelse følger de klassiske krav. Første linjer af *Iliaden* lyder:

*Syng os, gudinde, om vreden der greb Peleiden Achilleus,
vreden, den fæle, som voldte Achaierne tusinde kvaler,
sendte behjertede sjæle af talrige helte til Hades
og lod dem selv blive slængt som æde for hurtige hunde,
...*

Homers måde at skrive havde ikke kun stor indvirkning på græsk og romersk litteratur, men langt op gennem verdenslitteraturen. Læs i din Litteraturhistorie eller i andre bøger, eller på nettet, fx [her](#) om Homers måde at skrive på og svar på følgende:

- a) Kan du argumentere for at slægtskab mellem de krav der blev stillet til en forfatter og de krav der blev stillet til en matematiker?
- a) Der blev af Aristoteles og andre formuleret en række krav til, hvordan forfatterne skulle skrive. Euklids *Elementer* rummer en række krav til hvordan vi driver matematik. Diskuter følgende to påstande:
 - Det er en undertrykkelse af forfatterens frihed og vil give dårligere litteratur, når der stilles sådanne særlige krav til hvordan man digter.
 - Det er en undertrykkelse af matematikernes kreativitet, og vil give dårligere matematik, når der stilles sådanne særlige krav til, hvordan man laver matematik.

Øvelse 2. Kong Ødipus – de græske tragedier og den græske tanke

I afsnit 3.3 er der et oplæg til drøftelse af slægtskabet mellem den græske tragedies form og strukturen i den euklidiske tankegang.

Øvelse 3. Aristoteles Logik

Aristoteles (384 – 322 fvt) var elev af Platon, men gik i en anden retning. Hans omfattende forfatterskab dækker utrolig mange områder – fysik, zoologi, musik, retorik, poetik, logik, statsteori, etik og meget andet. Han oprettede sin egen skole eller universitet i Athen i 335, Lyceum, og sammen med Platon har han haft og har stadig meget stor indflydelse på hele den vestlige verdens tænkning. Han skrev bl.a. et værk med titlen *Logik*, hvorfra nedenstående uddrag er hentet. Du kan hente et større uddrag [her](#).

Læs det og argumenter for, i hvilken forstand Aristoteles og Euklids tilgange er beslægtede, og hvor der evt. er forskel. Inddrag begreberne *aksiom*, *definition*, *bevis*, *sande og første grunde*, *slutning*, *at vide en ting*.

- b) Aristoteles skrift om *Logik* rummer en række krav til, hvordan vi skal argumentere. Euklids *Elementer* rummer en række krav til hvordan vi driver matematik. Diskuter følgende to påstande:
- Det er en undertrykkelse af friheden at stille sådanne særlige krav til hvordan man argumenterer for sin sag.
 - Det er et udtryk for en demokratisk tanke at stille sådanne krav, der kan give et fælles grundlag i en dialog.

Først må vi sige, hvad en slutning er, og hvilke forskellige arter, der findes, sådan at vi kan forstå den 'dialektiske' slutning. For det er denne vi skal undersøge i den foreliggende afhandling.

En slutning er et argument hvorved, når visse ting er givet, noget andet end disse nødvendigvis følger på grund af dem. Slutningen er et bevis, når den hviler på sande og første grunde, eller når grundene er sådanne, at udgangspunktet for vort kendskab til dem er erhvervet ved hjælp af første og sande grunde. Slutningen er dialektisk, når der sluttes ud fra alment anerkendte meninger. De ting er sande og første, som giver vished, ikke på grund af andre ting, men på grund af sig selv; med hensyn til udgangspunkt for vor viden bør man nemlig ikke spørge videre, hvad de er grundet på – tværtimod skulle hvert af disse udgangspunkter i sig selv være sikkert. Alment anerkendte meninger er det, som menes enten af alle eller de fleste eller af de vise, og blandt disse igen enten af alle, af de fleste eller af de mest kendte og anerkendte.

...

En definition er et udtryk som betegner, hvad en tingvæsentlig er. Den angives enten som et udtryk, der træder i stedet for et ord, eller som et udtryk i stedet for et udtryk, for det er også muligt at definere ting, som betegnes med et udtryk. Men de, som på en eller anden måde udtrykker angivelsen ved hjælp af et ord, angiver åbenbart ikke definitionen af tingen, for enhver definition er et bestemt udtryk. ...

...

Vi mener i streng forstand at vide en ting, i modsætning til det at have kendskab til den på den tilfældige måde, en sofist har, når vi mener, vi kender den årsag, hvorpå kendsgerningen beror, når vi ser, at den er årsag netop til denne kendsgerning, og at kendsgerningen ikke kan være anderledes. ... Hvor vidt der findes en anden måde at vide på, skal vi senere drøfte, men det vi nu siger, er, at vi i alt fald ved i kraft af et bevis. Med bevis mener jeg en slutning som giver viden, og med at den 'giver viden', mener jeg, at vi ved, i og med at vi har forstået selve slutningen.

Øvelse 4. Jordens Søjler

I romanen 'Jordens søjler' af Ken Follet er gengivet en fiktiv beskrivelse af, hvordan en engelsk katedralbygger stifter bekendtskab med Euklids *Elementer* gennem sit møde med den muslimske kultur på en rejse til bl.a. Spanien. Jordens søjler foregår i 1100-tallet. I middelalderen havde kirken søgt at udlette enhver erindring om den græske filosofi og videnskabs høje stade, manuskripter var brændt eller teksten skrabet af pergamenter, så de kunne bruges til kirkeskrifter i stedet.

Men en del manuskripter overlevede gennem afskrifter. I det østromerske rige, med centrum i Konstantinopel, det nuværende Istanbul, var der fortsat lærde, der bevarede og studerede oldtidens værker på græsk, og i klostre i Vesteuropa var der munke, der ikke kunne få sig til at ødelægge skrifterne, og de lå gemt i århundreder. Men vigtigst af alt opstod et fristed for videnskab og kultur i den arabiske verden. I 762 bliver Bagdad grundlagt som en by der skal videreføre traditionen fra Aleksandria. Der etableres et bibliotek, et stort akademi og et astronomisk observatorium og de begynder systematisk at indsamle og opkøbe græske manuskripter og få disse oversat til arabisk. Der udvikles sideløbende en arabisk videnskab, der gav store bidrag til matematikkens og astronomiens udvikling. Eksempelvis var det afgørende for muslimerne at kunne bestemme den præcise retning til Mekka, uanset hvor de befandt sig. Det involverede både astronomi og udvikling af trigonometri. Vi kan i den arabiske udvikling følge alle fem spor i matematikkens udvikling. I B-bogen af *Hvad er matematik?* vil vi beskæftige os mere indgående med nogle af de arabiske bidrag.

Herfra fik europæerne så dels viden om nye navigationsinstrumenter, dels kendskab til de store astronomiske tabeller, der var de første skrifter, der blev oversat til europæiske sprog og endelig igen kendskab til de klassiske værker. Det første af disse værker, der blev oversat, var Ptolemaios *Almagest*, som er behandlet i projekt 8.1. Ptolemaios anvender geometri til at beskrive sin astronomi, og derfor følger kort efter oversættelsen af Euklids *Elementer*. Forbindelsen mellem det kristne Europa og den muslimske arabiske verden foregik hovedsageligt gennem Spanien. Efter at den muslimske religion havde slået rod i sit kerneområde på den arabiske halvø i 600-tallet, foregik der en voldsom islamisk ekspansion i 700-tallet, og via Nordafrika nåede de arabiske hære op i Spanien, hvor der så i mange hundrede år kom til at gå en grænselinje mellem de to kulturer. I lange perioder herskede der fred, og man rejste frem og tilbage over grænsen og lærte om og af hinanden.

Du kan [her](#) finde et uddrag af *Jordens Søjler*.

Øvelse 5. Faste regler inden for arkitektur – Serlios 7 bøger

I 1500 tallet udgav den italienske arkitekt Sebastiano Serlio et stort værk om arkitektur, som han kaldte *De syv bøger om arkitektur*. Værket starter med en omfattende indføring i Euklid, der nu er kendt stof i Europa. Hans projekt er at gennemføre præcise beskrivelser og anvisninger på alle detaljer i et bygningsværk. I afsnit 5.2 findes et projekt om Serlio med vægt på hans *søjleordner* og hans beskrivelse af *spiralkonstruktioner*.

Øvelse 6. Newtons Optik

Newtonholdt i 1670-72 forelæsninger om optik, og havde samlet et materiale til udgivelse. Men da nogle af hans synspunkter og forsøg blev kritiseret af fysikeren Robert Hooke blev Newton både såret og fornærmet, og nægtede at udgive noget eller deltage i nogen offentlig debat. Det tog mange år at overtale ham, og først i 1704 udkommer *Optics*. Hele værket ligger sammen med Newtons øvrige skrifter [her](#). Nedenfor følger et kort uddrag af introduktionen, og det fremgår jo tydeligt, at den videnskabelige standard på dette tidspunkt sættes af Euklids *Elementer*.

DEFINITIONS.

DEFIN. I.

B*Y the Rays of Light I understand itsleast Parts, and those as well Successive in the same Lines as Contemporary in several Line.*

...

DEFIN. IV.

The Angle of Incidence is that Angle, which the Line described by the incident Ray contains with the Perpendicular to the reflecting or refracting Surface at the Point of Incidence.

<4>

DEFIN. V.

The Angle of Reflection or Refraction, is the Angle which the line described by the reflected or refracted Ray containeth with the Perpendicular to the reflecting or refracting Surface at the Point of Incidence.

DEFIN. VI.

The Sines of Incidence, Reflexion, and Refraction, are the Sines of the Angles of Incidence, Reflexion, and Refraction.

...

AXIOMS.

AX. I.

THE Angles of Reflexion, and Refraction, lie in one and the same Plane with the Angle of Incidence.

AX. II.

The Angle of Reflexion is equal to the Angle of Incidence.

AX. III.

If the Refracted Ray be returned directly back to the Point of Incidence, it shall be refracted into the Line before described by the incident Ray.

AX. IV.

Refraction out of the rarer Medium into the denser, is made towards the Perpendicular, that is, so that the Angle of Refraction be less than the Angle of Incidence.

AX. V.

The Sine of Incidence is either accurately or very nearly in a given Ratio to the Sine of Refraction.

- Udfør tegninger til illustration af de angivne definitioner og aksiomer.
- Sammenlign Newtons aksiomer om indfaldsvinklerne og brydningsloven med en moderne fysikbog fremstilling. Hvad er forklaringen på forskellen
- Newtons værk handler om naturen, Euklids værk er rent matematisk. Giver det et problem?

Øvelse 7. Filosofiske systemer – Spinozas Etik

Den hollandske filosof Baruch Spinoza (1632-1677) skrev om fundamentale religiøse og etiske spørgsmål, og prøvede bl.a. at definere, hvad man må forstå ved "Gud". Du kan læse et uddrag af hans *Etik* [her](#).

- Gennemfør en sammenligning både mht. form og indhold mellem Spinozas og Euklids system.
- En af Spinozas læresætninger lyder: *Det menneske, der ledes af fornuften, er mere fri i en stat, hvor han lever efter den fælles beslutning, end i ensomheden, hvor han kun adlyder sig selv.* Sammenlign denne læresætning med følgende udtalelse af Georg Cantor, der bl.a. beviste, at der er flere slags uendelighed: *Matematikkens styrke er den frihed.*

Øvelse 8. Den amerikanske uafhængighedserklæring

Den amerikanske uafhængighedserklæring er et af verdenshistoriens mest berømte dokumenter. Du kan finde den i sin originale version [her](#). Hvor i teksten kan du se, at denne er skrevet af en matematiker, der kan sin Euklid, nemlig Thomas Jefferson, der siden blev præsident.

Øvelse 9. Bertrand Russels Principia (især for A-niveau)

Bertrand Russel var både en stor filosof og stor matematiker. Han forsøgte sammen med matematikeren Whitehead at skrive en moderne *Elementerne*, en bog, der lagde grundlaget for al matematik. Bogen *Principia Mathematica* var i 3 bind og udkom fra 1902. Den er meget vanskelig at læse, også for professionelle matematikere, hvad man kan overbevise sig om ved at kaste et blik på den berømte side 362, hvor de er nået frem til at bevise, at $1 + 1 = 2$. Siden ligger [her](#). I 1937 udgiver Russel selv et værk *Principles of Mathematics*, hvor han forklarer ideerne i det oprindelige værk. Dette værk kan man se [her](#).

- Læs de første to paragraffer
- Find på nettet oplysninger om dette storladne projekt og dets skæbne.

På A-niveau vender vi tilbage til spørgsmålet om, hvorfor et sådant projekt måtte kuldsejle.