Hvad er matematik? 1
ISBN 978 87 7066 827 9

Projekter: Kapitel 10

L&R Uddannelse EGMONT

Projekt 10.1
Er der huller i Euklids argumentation?
Et moderne aksiomsystem (især for A)

Indhold

ISBN 978 87 7066 827 9

Introduktion

Ambitionen med Euklids Elementer var at opbygge en aksiomatisk deduktiv teori, især inden for geometrien. En teori, hvor alle ræsonnementer bygger på definitioner og aksiomer, der er fastlagt fra starten samt på de tidligere sætninger, der er vist undervejs. Teorien kom til at danne skole for andre dele af matematik og for andre fag. Men holder projektet?

Den enetype af spørgsmål gik på, om man kunne nøjes med mindre end de 5 postulater og 5 aksiomer. Gennem hele matematikhistorien har man drøftet, om parallel-postulatet mon ikke kunne bevises ud fra de andre aksiomer. De utallige forsøg strandede altid, men *forsøget* på at vise det medførte meget positivt for matematikkens udvikling. Striden blev afgjort, da matematikere i det 19. århundrede konstruerede ikke-euklidiske geometrier. Historien om parallelpostulatet vender vi tilbage til på B- og A-niveau.

Den anden type af spørgsmål gik på, om der ikke var mangler, om man ikke havde brug for flere postulater. Allerede den græske kommentator Proklos fra ca. 410-485 skrev en kritisk kommentar til Euklid, hvor han påpegede adskillige svagheder. I årene omkring 1900, begyndte en række filosoffer og matematikere at give nye bud på en fuldstændig Euklid uden huller, hvilket igen førte til mange nye overvejelser omkring aksiomssytemerne og deres rolle. På A-niveau vil vi beskæftige os mere grundigt med forskellige aksiomsystemer, men her kan du selv prøve at gå på opdagelse og lege detektiv:

Hvor er der huller i Euklids argumentation, hvor bruger han resultater, han ikke har redegjort for?

Tag udgangspunkt i beviset for første sætning, der er grundigt gennemgået i øvelse 1. Eller tag udgangspunkt i din gennemgang af de første sætninger i Øvelse 2.

Omkring år 1900 udarbejdede datidens største matematiker David Hilbert et bud på et moderne aksiomsystem. Det følger her i en oversat og lettere bearbejdet version heraf. Du kan i dit detektivarbejde anvende det som dit hemmelige dokument.

ISBN 978 87 7066 827 9

Hilberts 16 aksiomer - Et moderne, konsistent og fuldstændigt aksiomsystem for geometri

En lettere bearbejdet version af David Hilberts aksiomsystem, inspireret af Marvin Jay Greenberg, *Euclidean and Non-Euclidean Geometries,* Freeman 1993)
(*Bemærk, at der nogle steder anvendes begreber, der skal defineres, fx i nr. 4 anvendes begrebet: at ligge på samme / modsatte side af en linje. Disse begreber defineres til sidst i dokumentet*)

For bedre at forstå aksiomerne, så lav selv tegninger til hver af dem

Skæringsaksiomer

1. Hvis P og Q er to forskellige punkter, findes der præcis én linje som indeholder både P og Q.

2. For hver linje *l* findes der mindst to forskellige punkter på *l*.

3. Der findes tre forskellige punkter med den egenskab, at ingen linje indeholder alle tre.

Beliggenhedsaksiomer

1. Hvis punktet B ligger mellem A og C, så er de tre punkter forskellige og ligger på samme linje, og B ligger også mellem C og A.

2. Hvis B og D er to forskellige punkter, så findes der yderligere tre punkter A, C og E på linjen gennem B og D, således at:
- B ligger mellem A og D
- C ligger mellem B og D
- D ligger mellem B og E

3. Hvis A, B og C er tre forskellige punkter, der ligger på samme linje, så er der præcis ét af punkterne, der ligger mellem de andre to.

4. Hvis *l* er en linje og A, B og C er tre forskellige punkter, der ikke ligger på *l*, så gælder:
- Hvis A og B ligger på samme side af *l* og B og C ligger på samme side af *l*, så ligger A og C på samme side af *l*.
- Hvis A og B ligger på modsat side af *l* og B og C ligger på modsat side af *l*, så ligger A og C på samme side af *l*.

ISBN 978 87 7066 827 9

L&R Uddannelse EGMONT

Kongruensaksiomer

De følgende aksiomer fastlægger hvad vi forstår ved kongruens. Det er i overensstemmelse med vores intuitive opfattelse af hvad det vil sige at to objekter er kongruente: Det betyder at man kan "flytte" det ene objekt så det præcis dækker det andet. Men i et aksiomsystem fastlægges betydningen af ordet præcis af de følgende aksiomer

1. Hvis A og B er to forskellige punkter, og A' er et vilkårligt tredje punkt, så vil der på hver halvlinje der udgår fra A' findes præcis et punkt B', der er forskellig fra A' og så AB er kongruent med A'B'.
"Linjestykker kan flyttes"

Notation: Vi bruger symbolet $\cong$ for kongruens, dvs.: $AB \cong A'B'$

2. Hvis $AB \cong CD$ og $AB \cong EF$, så er $CD \cong EF$. Endvidere er alle linjestykker kongruent med sig selv.
"Er to stykker kongruente med same tredje stykke, er de indbyrdes kongruente"

3. Hvis B ligger mellem A OG C, B' ligger mellem A' og C', og hvis $AB \cong A'B'$ og $BC \cong B'C'$, så er $AC \cong A'C'$.
"Addition af kongruente linjestykker giver kongruente linjestykker"

4. Givet en vinkel $\angle BAC$ og en halvlinje A'B', der udgår fra et punkt A', så findes der på hver side af linjen A'B' præcis én halvlinje A'C', således at $\angle BAC$.
"Vinkler kan flyttes"

5. Hvis $\angle A \cong \angle B$ og $\angle A \cong \angle C$, så er $\angle B \cong \angle C$. Endvidere er alle vinkler kongruent med sig selv.
"Er to vinkler kongruente med same tredje vinkel, er de indbyrdes kongruente"

6. Hvis vi har to trekanter ABC og A'B'C', hvor $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$ og hvor vinklernes to linjestykker er indbyrdes kongruente, dvs. $AB \cong A'B'$ og $AC \cong A'C'$, så er de to trekanter kongruente.
"Aksiomet binder kongruens af linjestykker sammen med kongruens af vinkler – dette aksiom er en sætning hos Euklid, som han prøver at vise, men hvor han bruger en flytningsoperation uden at have defineret dette"

Kontinuitetsaksiomer

(*De følgende aksiomer bygger på definitioner, der længden / størrelsen af et linjestykke*)

1. Hvis en cirkel *C* har et punkt indenfor og et andet punkt udenfor en anden cirkel *C'*, så vil de to cirkler skære hinanden i to punkter.

2. Hvis et linjestykke har det ene endepunkt inden for en cirkel og det andet endepunkt uden for cirklen, så skærer linjestykket cirklen i et punkt.

ISBN 978 87 7066 827 9

Parallelaksiomet (Hilbert)

For enhver linje *l* og ethvert punkt P, der ikke ligger på *l*, findes der højst én linje *m* gennem P, så *m* er parallel med *l*.
Når Hilbert siger "højst en" er det fordi man ud fra de øvrige aksiomer kan bevise, ar der findes mindst en.

Foruden disse aksiomer for geometrien findes der yderligere nogle aksiomer, der forbinder geometri med de reelle tal, dvs. med det at kunne måle størrelser.

Archimedes aksiom (Forudsætter eksistensen af naturlige tal)

Hvis CD er et linjestykke og *r* er n halvlinje der udgår fra et punkt A, så findes der til hvert punkt B på halvlinjen et helt tal n således at, hvis vi lægger n stykker af CD i forlængelse af hinanden, ud fra A, så fremkommer et punkt E hvorom der gælder, at $n \cdot \mathrm{CD} \cong \mathrm{AE}$, samt at B ligger mellem A og E, evt. er B = E.
"med en enhed kan vi måle vilkårligt store tal og længder"

Dedekinds Aksiom (konstruktion af de reelle tal)

Antag et alle punkter på en linje *l* er opdelt i to grupper, H og V, således at der ikke findes noget punkt i H, der ligger mellem to punkter i V og omvendt ikke noget punkt i V, der ligger mellem to punkter i H. Så findes præcis et punkt O på *l*, således at H og V er lig med hver sin af de to modsatrettede halvlinjer, der går ud fra O.

Definitioner

Tegn selv figurer der illustrerer hver af definitionerne.

Definition af parallelle linjer
To linjer *l* og *m* kaldes parallelle, hvis de ikke skærer hinanden, dvs. hvis der ikke findes noget punkt, der ligger på begge linjer.

Definition af beliggenhed
Lad linjen *l* være givet, og lad punkterne A og B være to forskellige punkter, der ikke ligger på *l*.
- Hvis linjestykket AB ikke indeholder punkter fra linjen *l*, siger vi at A og B ligger på samme side af *l*.
- Hvis linjestykket AB indeholder et punkt fra linjen *l*, siger vi at A og B ligger på modsat side af *l*.
Bemærk: Det udelukkede tredjes princip betyder, at to punkter enten ligger på samme side, eller ligger på modsat side.af en linje l.

ISBN 978 87 7066 827 9

L&R Uddannelse
EGMONT

Definition af halvlinje ("stråle")
Hvis vi har givet to forskellige punkter A og B, så er halvlinjen AB (betegnes af og til $\overrightarrow{AB}$) Punkterne på linjestykket AB samt alle de punkter C på linjen gennem A og B, som har eden egenskab, at B ligger mellem A og C. Man siger at halvlinjen $\overrightarrow{AB}$ *udgår* fra A. Man siger at halvlinjen AB er *en del af* linjen gennem A og B

Definition af modsatte halvlinjer
Halvlinjerne AB og AC kaldes *modsatte* (eller modsat rettede), hvis de er forskellige, udgår fra samme punkt A og hvis linjerne AB og AC er ens.

Definition af en vinkel
En vinkel med hjørne A er et punkt A sammen med to forskellige og ikke modsatrettede halvlinjer AB og AXC der udgår fra A. AB g AC kaldes *vinklens sider* eller vinklens *ben*. vinklen betegnes $\angle A$, □ A, $\angle BAC$ eller $\angle CAB$
Bemærk: Definitionen udelukker lige vinkler og vinkler med 0 grader.

Definition af supplementvinkler
Hvis de to vinkler $\angle BAD$ og $\angle CAD$ har en fælles side AD, og hvis de to andre sider AB og AC er modsatrettede halvlinjer, så kaldes de to vinkler for supplementvinkler.

Definition af ret vinkel
En vinkel $\angle BAD$ kaldes en ret vinkel, hvis den har en supplementvinkel, som den er *kongruent* med.
Bemærk: Ordet kongruent er ikke defineret. Det er et ord på linje med "lig med", men med en lidt bredere betydning. Betydningen af kongruens fastlægges i kongruensaksiomerne.

Definition af indre punkt i en vinkel
Hvis vi har givet en vinkel $\angle CAB$, så kaldes et punkt D for et indre punkt i vinklen, hvis D ligger på samme side af linjen AC som B gør, og hvis D ligger på samme side linjen AB som C gør.

Definition af en halvlinje mellem to halvlinjer
Halvlinjen AD siges at ligge mellem halvlinjerne AC og AB, hvis Ab og AC ikke er modsatrettede halvlinjer, og punktet D er et indre punkt i vinklen $\angle CAB$

Definition af det indre i en trekant
Det indre i en trekant er mængden af alle punkter, der er indre i hver af de tre vinkler. Et ydre punkt er et punkt, som hverken er indre eller ligger på trekantens sider.

Definition af det indre i cirkel
Givet en cirkel med centrum O og radius OR. Et punkt P kaldes et indre punkt, hvis $OP < OR$ og kaldes et ydre punkt, hvis $OP > OR$.