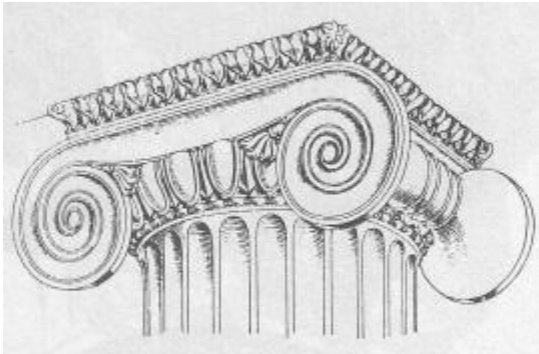
ISBN 978 87 7066 827 9

Projekt 10.13: Spiraler

Man kan nøjes med at gennemføre første del af projektet, som er den spiralkonstruktion, der er omtalt i kapitel 10. Eller man kan udvide med anden del, der giver en mere elegant, men også mere kompliceret spiralkonstruktion. Man kan også vælge senere at udbygge projektet med spiralkonstruktioner, der kræver lidt mere matematik, som vi møder på B-niveau.

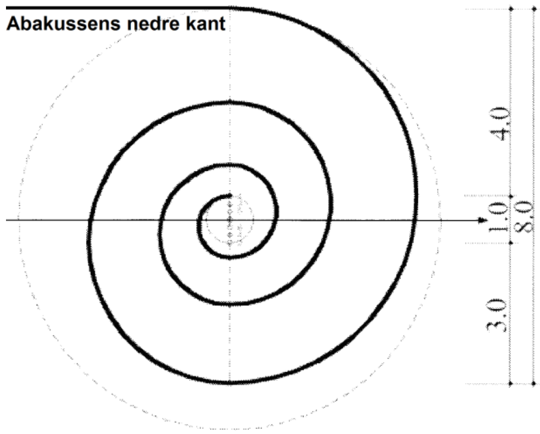
Første del: Vitruvs og Serlios beskrivelse af spiraler på ioniske søjler

Som omtalt i kapitel 10, afsnit 5.2 dukker spiraler op i antikken i forbindelse med den ene af de klassiske søjletyper, den *ioniske søjle*, der prydes af en kapitæl bestående af en dobbeltspiral, også kaldet en *volut*, med en cirkel i centrum, det såkaldte øje, og en 'pude' oven på volutten, den såkaldte *abakus*.



Den romerske arkitekt **Vitruv** var mildest talt ikke særlig klar i sin beskrivelse af udformningen af denne kapitæl:

'Hele kapitælens højde deles nu i ni en halv dele, hvoraf halvanden del svarer til højden af abakusssen og de resterende otte dele svarer til voluttens omfang. Trækkes en linje lodret fra et hjørne i abakussen kan man i en afstand af halvanden dele lægge et lodret linjestykke. Dette linjestykke deles nu med et punkt beliggende fire en halv dele under abakussen; dette svarer til centrum for voluttens øje; Det resterende udgør tre en halv del. Hvis der trækkes en cirkel med en radius svarende til halvdelen af en af disse dele, vil den netop udgøre en sjettedel[1] af volutten. Gennem dennes centrum trækkes en vandret linje, og med udgangspunkt i det øverste punkt af den lodrette diameter for volutten frembringes en kvartcirkelbue der netop rører undersiden af abakussen. Skift så centrum og lad successive radier blive formindsket med halvdelen af øjets diameter hver gang[2], så den sidste cirkelbue falder i selve øjet på den lodrette linje vinkelret under det punkt vi startede med.'

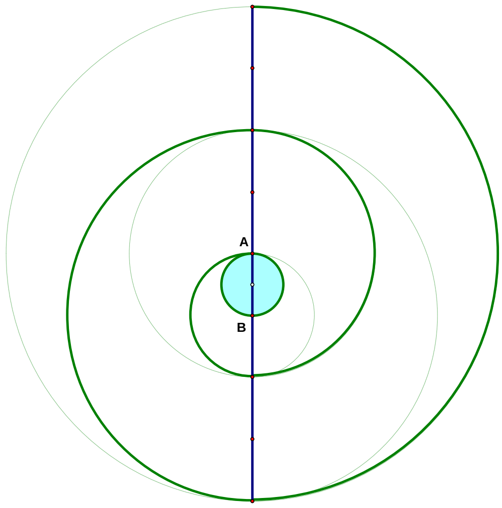


[1] Her må Vitruv mene en ottendedel, jfr. figuren.
[2] Også denne del er ret så uklar! Det fremgår fx ikke hvordan centrene for de successive kvartcirkelbuer skal placeres i forhold til øjet.

ISBN 978 87 7066 827 9

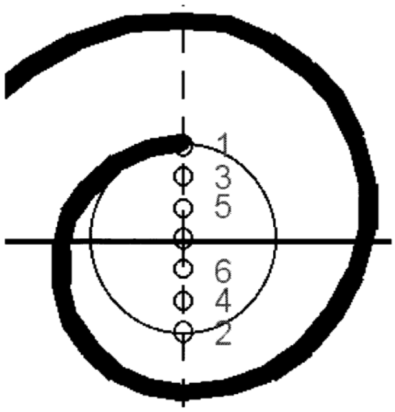
L&R Uddannelse
EGMONT

Så i renæssancen blev Vitruvs beskrivelse strammet betydeligt op og forskellige mulige konstruktioner blev forslået. Den første kommentar kommer fra Alberti i 1483. Han forenklede konstruktionen ved at slå kvart-cirkelbuerne sammen to og to til halvcirkelbuer med centre skiftevis i øjets øverste og nederste punkt. Derved fås en spiral med netop to omdrejninger, før spiralen slutter sig til øjet. Da den første radius er 4 enheder svarer det netop til at diameteren formindskes med øjets diameter hver gang, hvilket er i overensstemmelse med Vitruv, idet en halvcirkelbue svarer til to kvart-cirkelbuer.



Øvelse: Gennemfør Albertis konstruktion i dit dynamiske geometriprogram.

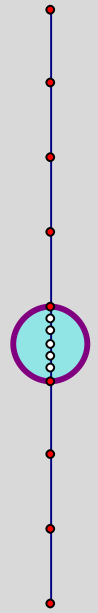
Men i den virkelige verden har spiralen typisk tre omdrejninger før den slutter sig til øjet. Den simpleste tolkning af Vitruv stammer fra den italienske arktitekt Serlio i 1537. Han benyttede som Alberti halvcirkler, men har en lidt mere kompliceret fordeling af centrene, idet han som forklaret i bogen først deler den lodrette diameter i voluttens pupil i 6 lige store dele, som han nummererer som vist udefra og indefter. Med centrum i delepunkt 1 trækker han først en halvcirkel fra det øverste punkt på den lodrette diameter for volutten (dvs. abakussens nederste kant). Derefter skifter han centrum til delepunkt 2, ligesom Alberti, men herefter flyttes delepunkterne langsomt indad mod øjets centrum indtil han kommer til delepunkt 6, som er centrum for den sidste halvcirkel. På denne måde får spiralen netop tre fulde omdrejninger og slutter sig som den skal til øjet.



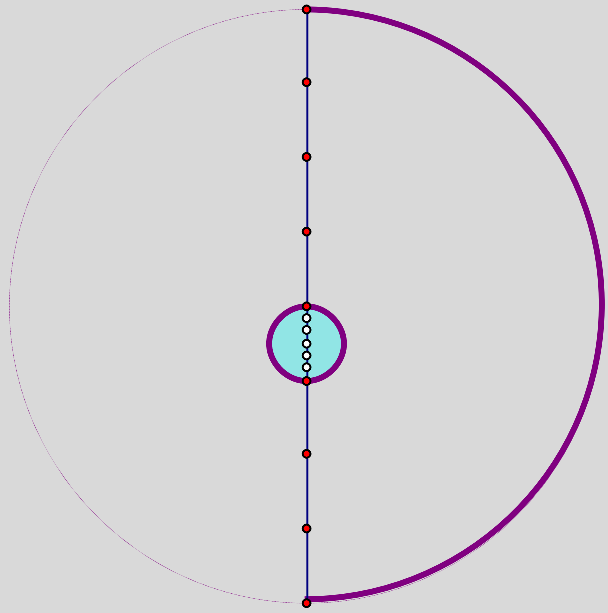
Øvelse: Gennemfør nu selv i dit dynamiske geometriprogram Serlios spiralkonstruktion som vist i detaljer ni det følgende:

ISBN 978 87 7066 827 9

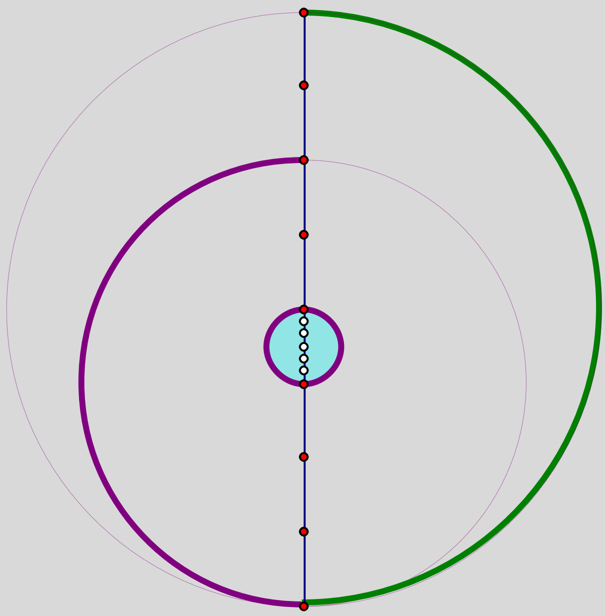
L&R Uddannelse EGMONT



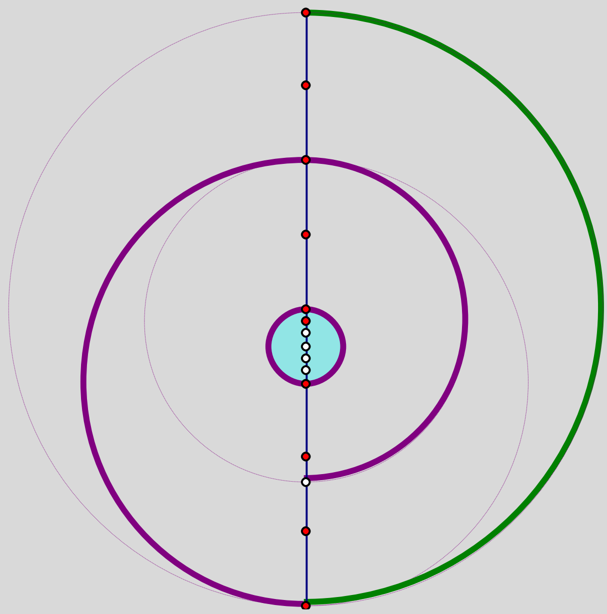
Først deles en lodret linje i otte lige store dele, hvor den fjerde del fra neden netop svarer til diameteren for voluttens øje. Dernæst deles diameteren for øjet i seks lige store dele.



Så tegnes den første og yderste halvcirkelbue med den lodrette linje som diameter, dvs. det øverste delepunkt i øjet som centrum. Denne halvcirkelbue slutter altså tættere på øjet i sit nederste punkt.

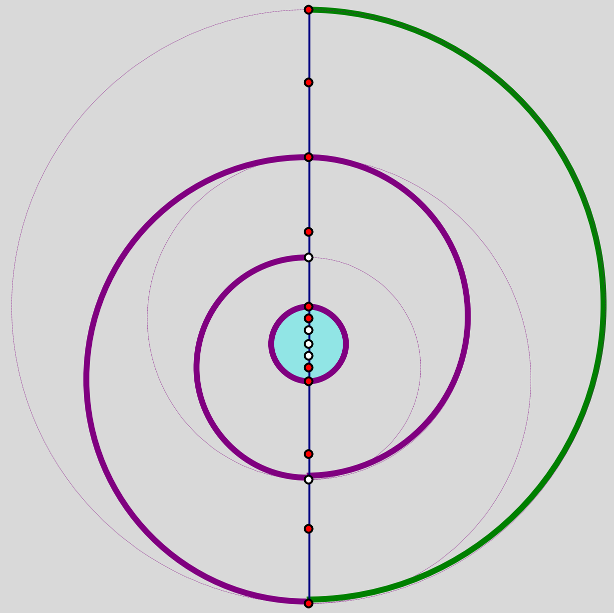


Så tegnes den næste halvcirkelbue som en fortsættelse af den forrige men denne gang med centrum i det nederste delepunkt i øjet. Den spænder altså over de seks nederste delepunkter.

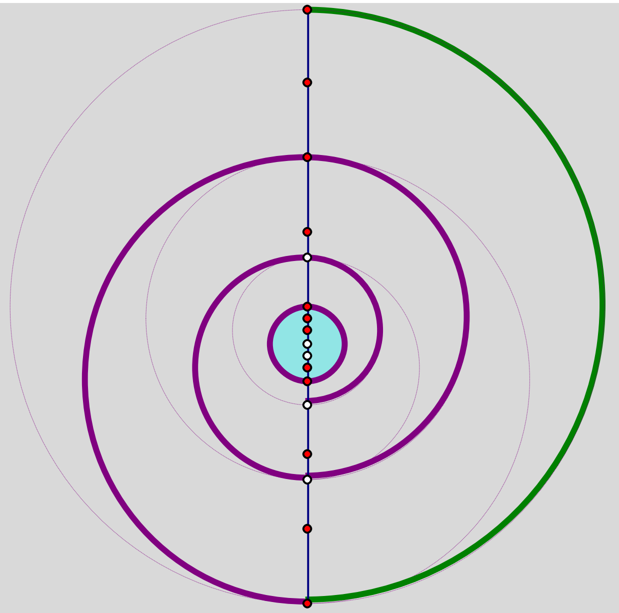


Den næste halvcirkelbue er igen en fortsættelse af den forrige, men denne gang med det næstøverste delepunkt i øjet som centrum.

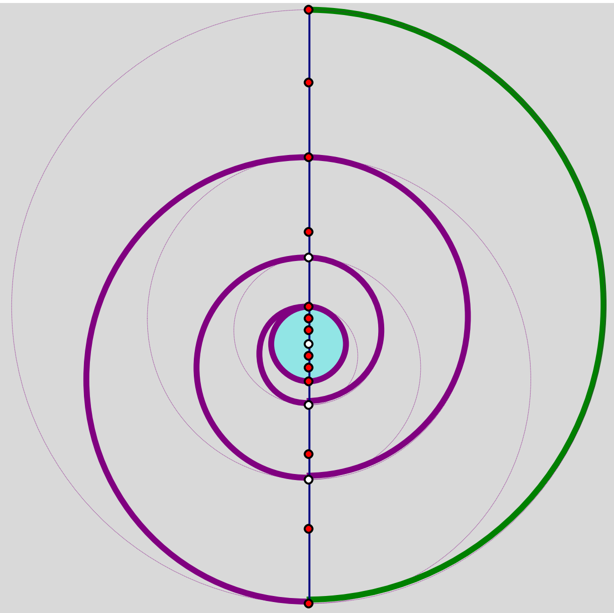
ISBN 978 87 7066 827 9



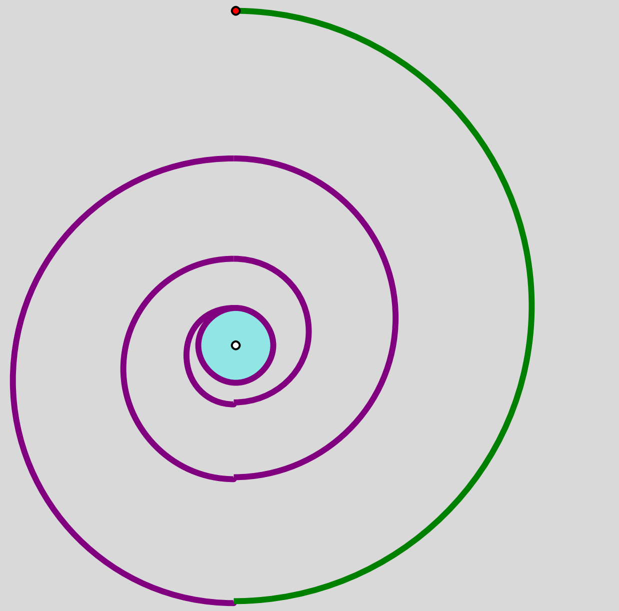
Den næste halvcirkelbue er igen en fortsættelse af den forrige, men denne gang med det næstnederste delepunkt i øjet som centrum.



Således fortsætter vi med at indsnævre halvcirkelbuen, idet vi skifter med at vælge centrene for oven og for neden og successivt tættere på øjet.



I det næste skridt lukker spiralen sig netop om øjet og vi er færdig med selve spiralen.



Vi kan nu skjule hjælpelinjerne og evolutten fremstår som en spiral med et øje.

Serlios spiralkonstruktion er nok den simplest mulige, men den er ikke så elegant, for ved at bruge halvcirkelbuer kommer den til at virke lidt skæv.

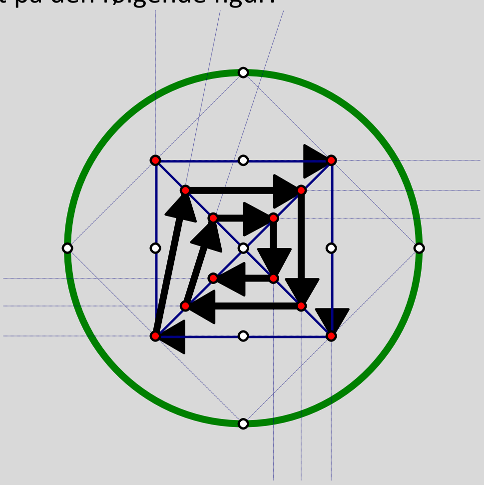
ISBN 978 87 7066 827 9

Her har vi ved hjælp af en spejling fået frembragt den fulde dobbeltspiral efter Serlios konstruktion.

Anden del: Salviatis konstruktion af spiraler

Det blev derfor også foreslået at man som i Vitruvs tekst skulle forsøge sig med kvartcirkelbuer og måske endda ottendelsbuer i konstruktionen. Prisen er imidlertid en mere kompliceret fordeling af centrene for cirkelbuerne, som jo i Serlios konstruktion altid ligger på den lodrette diameter for centercirklen. Ønsker vi fx tre omdrejninger med kvartcirkelbuer kræver det således 12 centre, der skiftevis ligger på lodrette og vandrette linjer. Centrene bliver da i stedet spredt ud på et kvadratisk net med 6×6 = 36 gitterpunkter, hvilket selvfølgelig betyder at man skal holde tungen lige i munden for at slippe frelst gennem alle 12 kvartcirkelbuer.

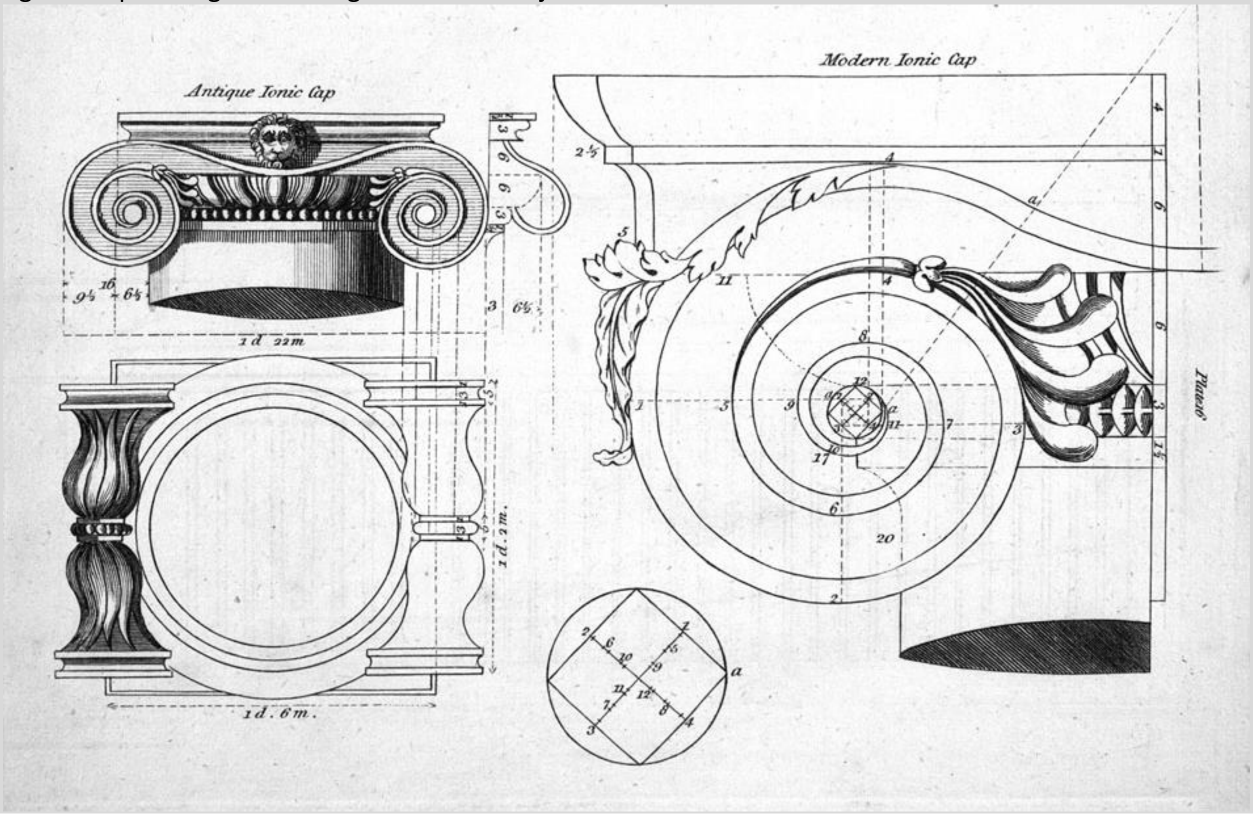
Øvelse: I 1552 offentliggør Salviati en simpel regel for hvordan centrene skal placeres, hvis man ønsker at bruge kvartcirkelbuer. Da han skal bruge dobbelt så mange buer er udgangspunktet denne gang et kvadrat med den halve diameter som side. Dette finder han indskrevet i centercirklen ved at halvere et kvadrat indskrevet i centercirklen som vist på den følgende figur:



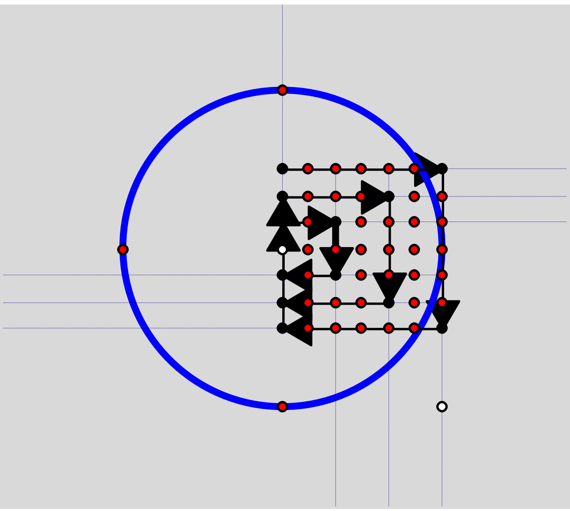
De 12 centre findes nu ved at starte i øverste venstre hjørne og følge pilene rundt. Den første radius fås af Vitruvs regel om at abakussen skal ligge fire diametre oven over centercirklen. Resten af radierne følger nu

ISBN 978 87 7066 827 9

ved at lave kvartcirkelbuer og fortsætte indtil man når indtil centercirklen. Efterprøv Salviatis konstruktion og forklar hvor han snyder på vægten! Selvom han rent faktisk snyder blev konstruktionen uhyre populær og findes på mange afbildninger af ioniske søjler.



Øvelse[3]: Faktisk er det ikke så svært at undgå Salviatis snyd med spiralkonstruktionen. Her er en moderne udgave, hvor vi som før lægger et kvadrat med den halve diameter som side inde i centercirklen og udbygger det til et kvadratisk gitter med 6×6 = 36 delepunkter. De 12 centre findes nu ved at starte i øverste venstre hjørne og følge pilene rundt. Den første radius fås af Vitruvs regel om at abakussen skal ligge fire diametre oven over centercirklen. Resten af radierne følger nu ved at lave kvartcirkelbuer og fortsætte indtil man når centercirklen. Efterprøv konstruktionen.



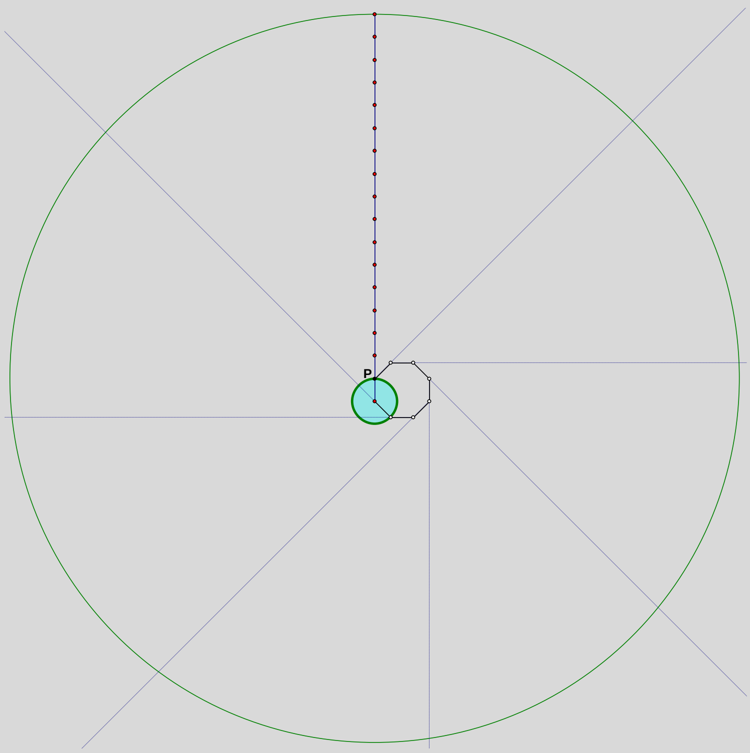
[3] Fra Sacred geometry af Miranda Lundy, Wooden books Ltd, 1998.

ISBN 978 87 7066 827 9

Tredje del: Arkimedes-spiraler og logaritmiske spiraler

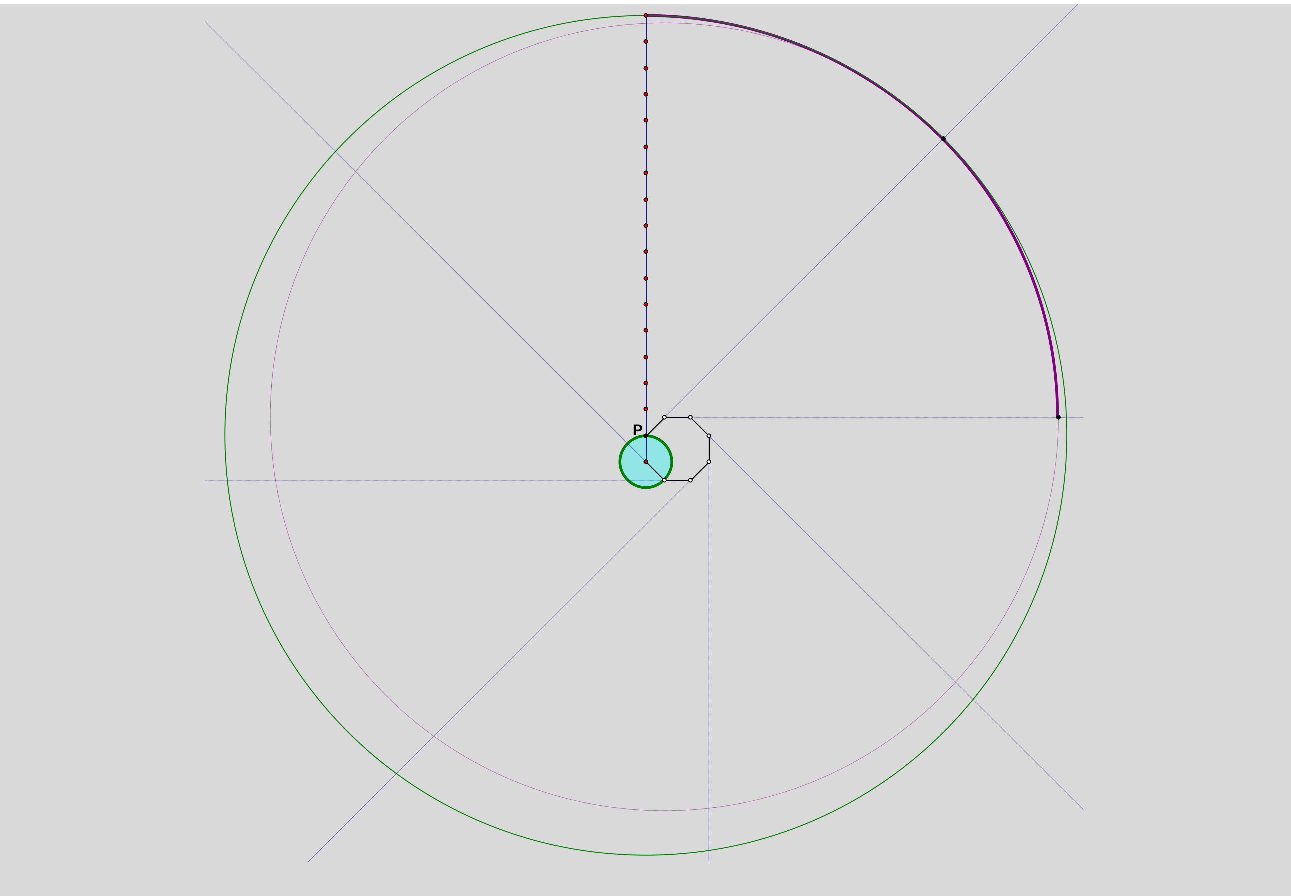
Dette afsnit rummer matematik, vi først møder på B-niveau, og kan gemmes til det tidspunkt, hvor vui udbygger det. Men vi præsenterer det her, dels for at perspektivere og dels fordi man godt kan gennemføre konstruktionerne nu. Så kan teorien komme på senere.

Øvelse: Albertis spiral kan nemt generaliseres til en fin approksimation af en **Arkimedes-spiral**, hvor radien for hver bue formindskes med det samme stykke hver gang. Skal der være et centralt øje, som spiralen lukker sig om, skal dimensionerne blot vælges med omhu. Lad os som et eksempel se på ottendedelsbuer. Udgangspunktet er da det centrale øje og det øverste punkt som ligger 16 øjeradier over øjet, hvis spiralen skal gennemføre to fulde omdrejninger hvor radien for hver omdrejning mindskes med en øjeradius. Vi starter da med at konstruere en regulær ottekant over øjets lodrette radius:



Spiralen starter da med at have centrum i P og gå gennem det øverste delepunkt på aksen. I næste skridt flytter vi til den næste stråle på ottekanten og bruger hjørnet i ottekanten som centrum og lader cirklen gå gennem skæringspunktet med den første bue:

ISBN 978 87 7066 827 9



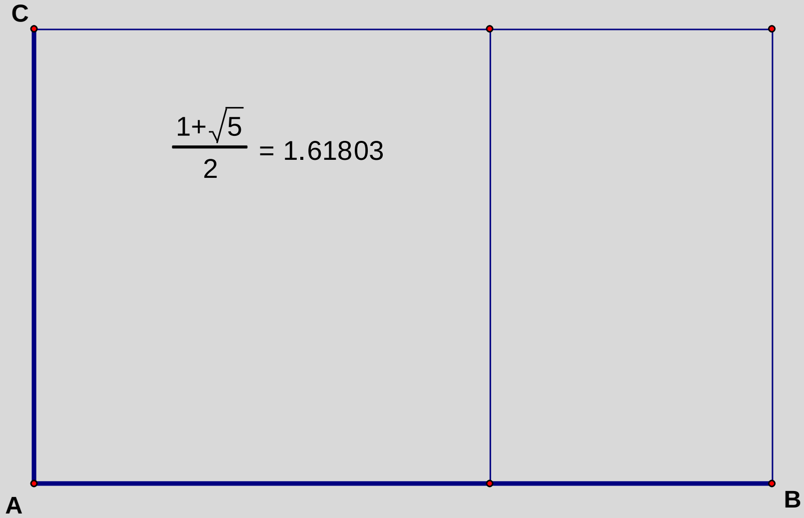
Fortsæt således og eftervis at spiralen lukker sig om øjet og at den ender i punktet *P*.

ISBN 978 87 7066 827 9

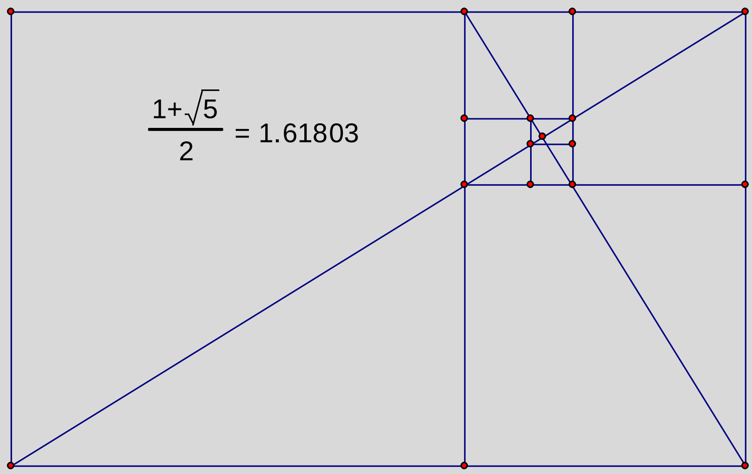
L&R Uddannelse EGMONT

Øvelse: Den gyldne spiral

I naturen er det ofte logaritmiske spiraler, der er de fremherskende spiralformer. De kan også tilnærmes med cirkelbuespiraler efter det foregående mønster. Særligt berømt er den gyldne spiral bygget over det gyldne snit. Udgangspunktet er denne gang et gyldent rektangel, hvor siderne forholder sig som det gyldne snit, der som vist bør defineres helt præcist:

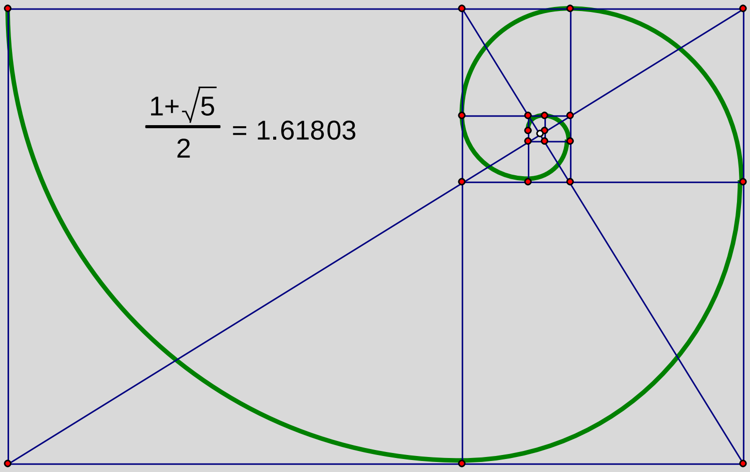


Pointen ved det gyldne snit er nu at hvis man som vist skærer et kvadrat ud er resten selv et gyldent rektangel, men nu drejet 90° i forhold til det oprindelige. Men så kan vi jo igen skære et kvadrat ud osv.



Men hvert af kvadraterne spænder jo over en kvartcirkelbue, hvorfor vi kan trække en spiral igennem delepunkterne på rektanglernes sider:

ISBN 978 87 7066 827 9



Gennemfør konstruktionen af den gyldne spiral i dit dynamiske geometriprogram. Hvor ligger centrum for spiralen i forhold til siderne i det gyldne rektangel? Er nautilus skallen nedenunder et eksempel på en gylden spiral?