

Projekt 0.1 Flatland – A romance of many dimensions

Kort om matematikken i 1800-tallet

Nye geometrier opstår på baggrund af Euklids 5. postulat – parallelpostulatet:

"Hvis to linjer skæres af en tredje, og hvis de indvendige vinkler på samme side er mindre en to rette, så mødes de to linjer, når de fortsættes ubegrænset på den side, hvor de to vinkler, der tilsammen er mindre end to rette, ligger".

Euklids komplicerede formulering og det faktum at han først ret sent i "Elementerne" gør brug af det 5. postulat har nok været hovedårsagen til at mange matematikere gennem tiden har forsøgt at bevise netop dette ud fra det fire andre, men det mislykkes og i begyndelsen af 1800-tallet står det klart, at det er muligt at definere andre geometrier, hvor det 5. postulat ikke gælder! Den euklidiske geometri gælder i det 2-dimensionale og det 3-dimensionale rum, men pga. det omdiskuterede parallelpostulat forsøgte mange matematikere at beskrive nye geometrier (hyperbolsk geometri og elliptisk geometri) på andre flader – ikke-euklidisk geometrier som fx geometri på en kugleflade (sfærisk geometri), hvor parallelle linjer opfattes som storcirkler, som jo vil skære hinanden, og der opstår trekanter med en vinkelsum større end 180 grader.

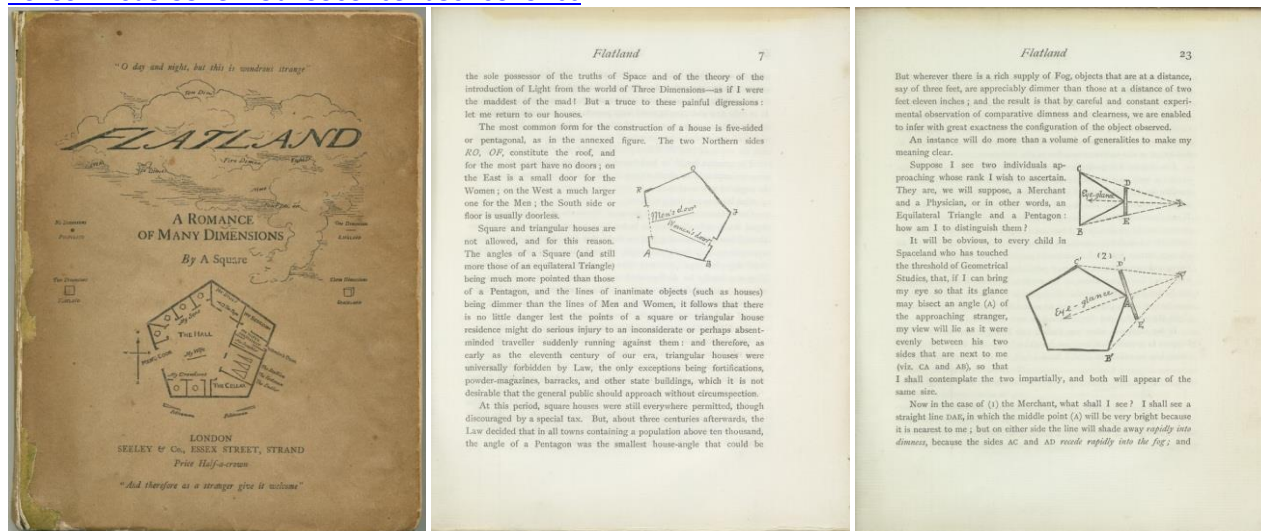
Efter opgøret med parallelpostulatet begynder matematikerne at interessere sig for rum af højere dimensioner.

Romanen Flatland – A romance of many dimensions

Romanen *Flatland*, der udkom i 1884, kan læses som en satire over det victorianske England, eller som en fantasifuld og populær indføring i det matematiske dimensionsbegreb – men det mest oplagte er at læse den som begge dele. I undervisningen er det en oplagt mulighed for et fagligt samarbejde mellem matematik og engelsk. Og værket indeholder rigeligt stof nok til en srp i de to fag.

Hele romanen kan læses flere steder på nettet. Her ligger en illustreret udgave online med alle de originale figurer på:

<http://www.eldritchpress.org/ea/FL.HTM>. Desuden findes en scannet udgave af 1884-originaludgaven her: <http://dl.lib.brown.edu/catalog/catalog.php?verb=render&id=112982371855756&view=pageturner&pageno=1&PSESSID=6a8f551e715d433634ce1b80163292cc>



Fra originaludgaven, 1884.

Fortællingens handling

Edwin Abbotts fortælling beskriver eksistensen af parallelle verdener. Hovedpersonen og fortælleren er Mr. A. Square, som lever i en 2-dimensional verden, *Flatland*, hvor alle indbyggere med undtagelse af kvinderne og den laveste sociale klasse er regulære polygoner. Kvinderne har en særstatur i form af deres fysiske fremtoning – de er rette linjer, som kan prikke hul på polygonerne! Den laveste sociale klasse, arbejderne, er ligebenede trekanter, og man er bundet af sin klasse i den kategori, mens børn i de øvre klasser bliver født med en side mere end deres forældre, fx vil børnene i en lige-sidet-trekant-familie blive kvadrater.

I den første del af fortællingen beskriver Abbott samfundsstrukturen i Flatland, som gennem en analyse viser sig at være en satirisk fremstilling af netop det victorianske samfund præget af klassesdeling og konservatisme.

I Flatland er det meget vanskeligt at genkende hinanden, fordi alt og alle fremstår som linjer for det utrænede øje, og der er derfor behov for en omfattende uddannelse i netop denne disciplin. I de laveste klasser lærer man dog kun at genkende andre ved at føle, hvilket jo selvsagt kan være en farlig affære, hvis det er en kvinde, man møder – eller en arbejder, som jo også kan være faretruende spids! I de øvre klasser lærer man "*Recognition by sight*", dvs. man lærer at kunne genkende vinklers størrelser ud fra de nuanceforskelle siderne (evt. krumningen) fremtræder med afhængigt af afstanden mellem betragteren og den betragtede.

I afsnittet "*Of the doctrine of our priests*" fortælles om magtforholdet i samfundet, og her fortælles bl.a. om tidligere oprør, specielt om "*The Chromatic Sedition*", som beskriver, hvordan fladlænderne begyndte at male deres sider. Dette gjorde genkendelsesproceduren meget lettere for alle, hvilket betød, at klasseforskellene var i fare for at nedbrydes, hvorfor myndighederne vedtog ved lov, at det var forbudt at male sine sider!

Øvelse:

Forklar hvorfor det ville være meget vanskeligt at skelne mellem en kvinde og en præst (højadelig person), hvis de skulle males således, at deres forreste halvdel (med ansigt) var én farve og deres bagerste en anden – argumenter gerne ved hjælp af en tegning.

I anden del af fortællingen møder Mr. Square et væsen fra en dimension, som han ikke ved eksisterer, fordi han ikke er i stand til at se den, nemlig Mr. Sphere, som kommer fra den 3. dimensionale verden, *Spaceland*. Mr. Sphere fortæller Mr. Square om kongen af *Pointland*, som er almægtig i sit en-mands univers – i sin 0-dimensionale verden! Mr. Square selv fortæller om en sær drøm han har haft, som handlede om *Lineland*, en 1-dimensionale verden beboet af punkter på en linje.

Abbotts matematiske anskuelser peger på en diskussion om eksistensen af en 4. dimension, som på den tid var et "hot" intellektuelt emne. I 1905 formulerer Albert Einstein sin specielle relativitetsteori, hvor netop tid og rum bindes sammen, populært sagt optræder tiden som en 4. dimension. I H. G. Wells' science fiction roman "*Timemachine*" (dansk: *Tidsmaskinen*) fra 1895 betragtes den 4. dimension også som en tids-dimension, som dog er uafhængig af rum, men den beskrives som en nødvendighed for at ting kan eksistere – ting må have en højde, en bredde, en længde og en varighed.

Romanen er en fortælling i mange dimensioner (som titlen også hentyder til) – en filosofisk diskussion af vores evne til (eller manglende evne til) at opfatte den verden, vi lever – både fysisk og åndeligt. Flatland er religiøst med en gudeopfattelse, der ligner den kristne (Gud som alvidende), og med Mr. Spheres indtræden i Flatland og gennem Mr. Squares diskussioner med Mr. Sphere, bidrager Abbott også til religionsdebatten med både en satiriske og en filosofisk fremstilling.

Anmeldelserne af bogen fra den tid pegede derfor også i mange forskellige retninger helt afhængigt af læserens forforståelse.

Øvelse:

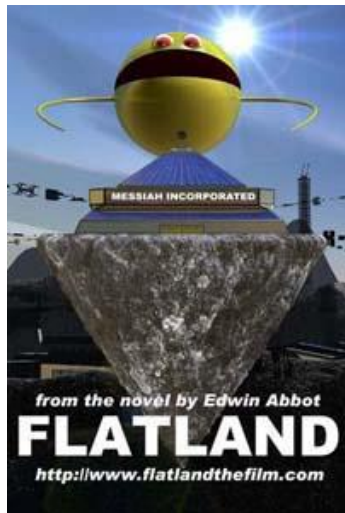
Læs nogle af anmeldelserne samlet af Brown University Library: <http://dl.lib.brown.edu/flatweb/reviews.html>

Efter mødet med Mr. Sphere vil Mr. Squares udbrede sin viden til folket, men hans fortællinger betragtes som kætterske og han fængsles. I fængslet skriver han sine memoirers "*Flatland: a romance of many dimensions*". <http://www.youtube.com/watch?v=Mfglluny8Z0&feature=related>

Film

Der findes to animationsfilm baseret på romanen:

Flatland the film er lavet af Ladd Ehlinger Jr. *Flatland the film* er meget tro mod romanens handling.



Man kan finde hele filmen her:

<http://www.youtube.com/watch?v=Mfglluny8Z0&feature=related>

Flatland the movie, Flat World Productions, LLC. Man kan se trailer på You Tube (2 min): men man skal købe sig adgang til hele denne film:

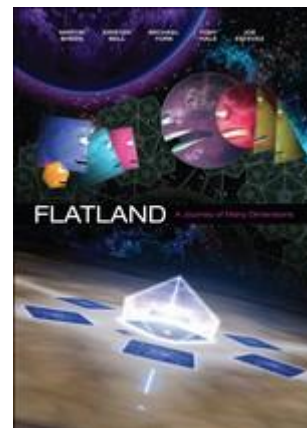
<http://www.flatlandthemovie.com/>

<http://www.youtube.com/watch?v=C8oiwnNlyE4>

Flatland the Movie har tilladt visse friheder fx er kvinderne her ikke rette linjer, men cirkler, hvilket gør at flere dimensioner af historien går tabt. Konceptet er sikkert valgt for at gøre den meget komplekse fortælling simple, så den kan anvendes i matematikundervisningen i de lavere klasser.

Folkene bag *Flatland the Movie* er i gang med *Flatland 2: Spaceland*, hvor de ifølge traileren: sender Mr. Square og Mr. Sphere ud på en faretruende ekspedition for at lede efter den 4. dimension. Trailer:

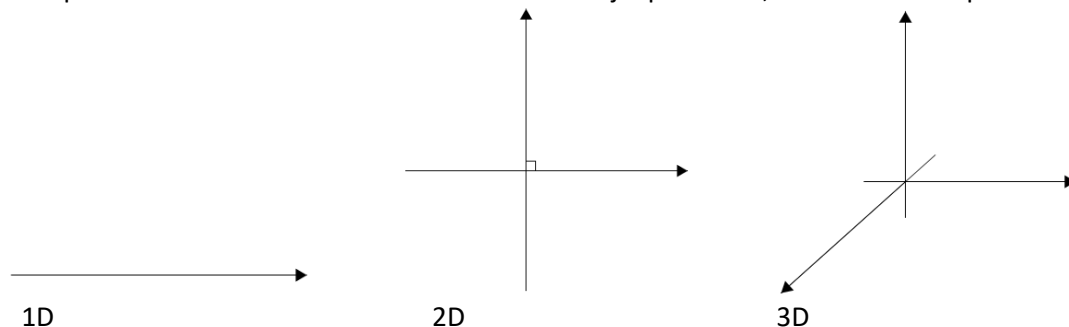
<http://www.youtube.com/watch?v=3EGHu6ZHb8s>



Hvad er dimensioner? Om hyperterningen

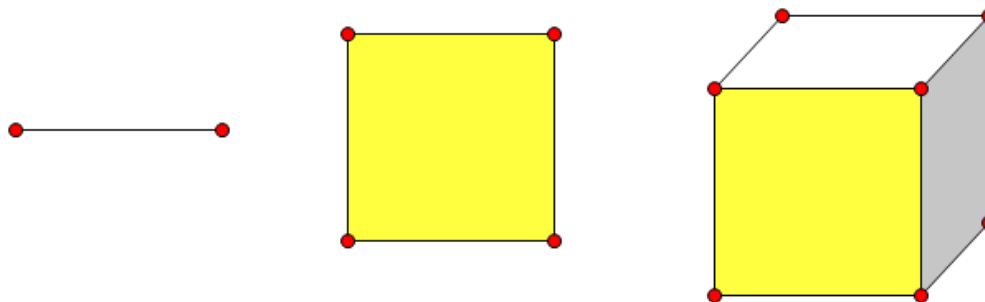
I matematik er et objekt, der kun har en længde et 1-dimensionalt (1D) objekt, et objekt, der yderligere har en bredde, kalder vi 2-dimensionale (2D), og et objekt der yderligere også har en dybde (eller højde) kalder vi et 3-dimensionalt (3D) objekt.

I vores hverdag, forekommer det os, at alt i universet, som vi lever i, er tre-dimensionale objekter. En bekvem måde at repræsentere dimensioner i matematik er ved hjælp af akser, der er vinkelret på hinanden.



Mr. Sphere bruger en analogi baseret på *Pointland* og *Lineland* til at formidle ideen om den tredje dimension til Mr. Square. I de følgende øvelser benyttes samme teknik, hvor vi vil nå frem til intuitivt, at kunne forestille os den 4-dimensionale terning.

Vi betragter først en n -terning, dvs. et n -dimensionalt objekt, der består af grupper af modstående parallelle linjestykker af samme længde og vinkelret på hinanden svarende til hvert af rummets n -dimensioner.



Figuren viser en 1D-terning (linje), en 2D-terning (kvadrat), og en 3D-terning.

Når Mr. Sphere sænker sig ned gennem Flatland, viser hans tværsnit som en cirkel, hvis omkreds bliver større og større og senere mindre og mindre indtil han til sidst forsvinder.

- 1) Beskriv i hvert af de tre tilfælde nedenfor tværsnittet af en 3D-terning, der sænkes ned gennem Flatland:
 - a) vinkelret på fladen,
 - b) med et hjørne først
 - c) med en kant først

Hvis du har svært ved at forestille dig det, så se animationerne på:

<http://www.math.union.edu/~dpvc/math/4D/cube-flatland/welcome.html>

Siden er en del af en større website om 4D: <http://www.math.union.edu/~dpvc/math/4D/welcome.html>

En terning i mere end tre dimensioner kaldes en hyperterning, og da vores hjerne er vænnet til at opfatte i 3D, har de fleste af os vanskeligt ved at forestille os, hvordan en sådan hyperterning ser ud – fuldstændig ligesom Mr. Square, der har svært ved at visualisere Mr. Sphere, mens de begge befinder sig i Flatland.

- 2) Hvor mange *hjørner* har hver af terningerne i a)?
- 3) Hvor mange hjørner vil du forvente at en 4D-terning har?
- 4) Gør rede for at, den generelle formel

$$H_n = 2^n$$

beskriver antallet af hjørner i en hyperterning i n dimensioner.

- 5) Hvor mange *kanter* har hver af terningerne fra a)?
 - 6) Hvor mange kanter vil du forvente at en 4D-terning har?
- Vink: Prøv visuelt at udvide 3D-terningen på samme måde som 2D-terningen kommer af en udvidelse af 1D-terningen.

- 7) Gør rede for at, den generelle formel

$$K_n = n \cdot 2^{n-1}$$

beskriver antallet af kanter i en hyperterning i n dimensioner.

- 8) Vis, at

$$K_{n+1} = 2 \cdot K_n + H_n$$

I Flatland ræsonnerer Mr. Squares søn sig frem til at et punkt, der forskydes en given længde fx vandret beskriver et linjestykke, mens et linjestykke, der parallelforskydes præcis sin egen længde langs en akse vinkelret på sig selv, beskriver et kvadrat.



Fortsættes dette ræsonnement, så vil et kvadrat, der parallelforskydes (med en længde svarende til sidelængden) langs en akse vinkelret på fladen beskrive et hyperkvadrat, dvs. en 3D-terning.

Dvs. en terning i n dimensioner kan frembringes ved en parallelforskydning af en terning i $n-1$ dimensioner. Således kan en 4D-terning frembringes ud fra en 3D-terning ved en parallelforskydning vinkelret på fladerne.

Lad os nu tælle hvor mange $n-1$ -dimensionale kanter, der er på en n -terning:

1) Når vi et punkt, så får vi en linje med 2 *punkter* som grænser.

Når vi forskyder et linjestykke, så får vi et kvadrat med 4 *kanter* (linjestykker) som grænser.

Når vi forskyder et kvadrat, så får vi en terning med 6 *flader* (kvadrater) som grænser.

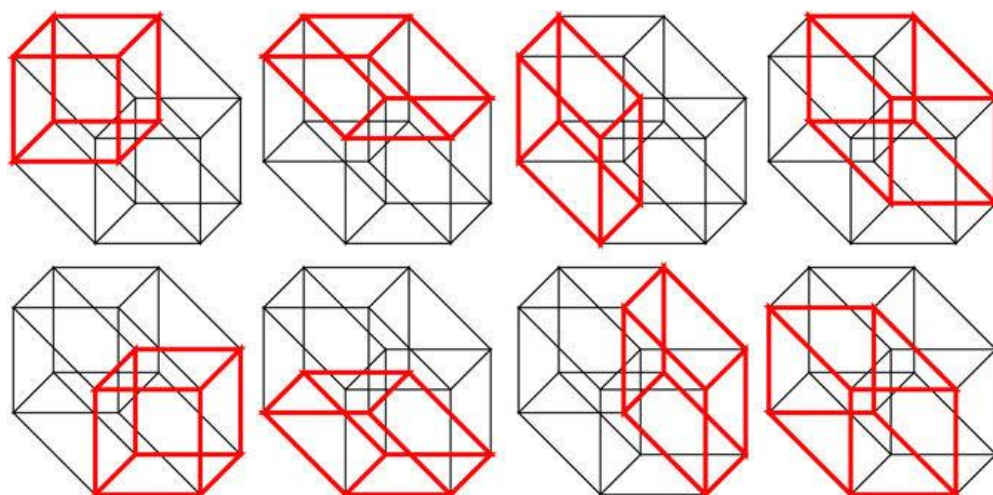
Lad os nu tælle hvor mange $n-1$ -dimensionale kanter, der er på en n -terning:

2) Når vi parallelforskyder et punkt, så får vi en linje med 2 *punkter* som grænser.

Når vi forskyder et linjestykke, så får vi et kvadrat med 4 *kanter* (linjestykker) som grænser.

Når vi forskyder et kvadrat, så får vi en terning med 6 *flader* (kvadrater) som grænser.

3) Når vi forskyder en terning, hvor mange terninger har hyperterningen så som grænser?



De 8 terninger i hyperterningen – gå selv på opdagelse på:

<http://www.instructables.com/id/3d-4-Dimensional-Tesseract-Hypercube-Model-B-TJT4/>

Der er masser af billeder og animationer af hyperterningen på nettet, se fx denne:

<http://www.youtube.com/watch?v=t-WyreE9Zkl&feature=related>

På adressen: <http://www.math.ku.dk/formidling/studieretningsprojekter/>

findes et oplæg til et studieretningssamarbejde eller et studieretningsprojekt mellem matematik og engelsk med udgangspunkt i Flatland.