

I lyset af de græske geometeres bedrifter er man undertiden tilbøjelig til at glemme, at grækerne også beskæftigede sig med studiet af tallene, og dette kapitel giver eksempler på deres teoretiske såvel som praktiske interesse i tal. Uddraget fra Euklid er af talteoretisk art, mens uddraget fra Archimedes beskæftiger sig med det mere praktiske problem at benævne tal.

Lad os begynde med det lille afsnit af Euklid. Den måde, han nærmer sig aritmetikken på, er meget lig hans oplæg til geometrien; for begge discipliners vedkommende begynder han med en lang række definitioner, der dels indfører begreber, der allerede er læseren bekendte, dels indfører begreber, der efter al sandsynlighed vil være ham nye. Som det var tilfældet i Bog I, er det de første definitioner, der frembyder de største vanskeligheder, idet de beskæftiger sig med grundbegreberne; læg eksempelvis mærke til Euklids definition af »enhed« og »tal«.

Definitionerne efterfølges imidlertid hverken af postulater eller aksiomer. Fraværet af aksiomer er let at forklare: der er ingen forskel på geometriens og aritmetikens aksiomer, og da de allerede er angivet i Bog I, behøver man ikke at gentage dem her. Hvad postulaterne angår, er det derimod en anden sag. Det ser ud, som om Euklid ikke har anset det for nødvendigt at postulere noget som helst inden for aritmetikken. Dette er tydeligvis forkert. Ligesom man inden for geometrien må forudsætte, at visse konstruktioner kan udføres, således findes der inden for aritmetikken operationer, hvis tilladelighed man må forudsætte, om man da skal kunne bevise noget. For eksempel bør der være et postulat, som siger: »Lad det være forudsat, at hvis a , b og c er tre tal, da er summen af a og b lagt til c det samme tal som det, der fås ved at lægge a til summen af b og c «, eller » $(a + b) + c = a + (b + c)$ «. Der mangler adskilligt flere postulater af denne slags hos Euklid. Lige så omhyggelig og nøjagtig han var med de geometriske forudsætninger, lige så skødesløs og ubekymret er han her. I modsætning hertil lægges der inden for den moderne aritmetik og algebra uhyre vægt på at finde frem til de rette forudsætninger.

I Definition 11 defineres et *primtal* som et tal, »som måles af enheden alene«. Man kunne også definere det som et tal, der kun er deleligt med sig selv og 1. Som eksempler på primtal kan vi angive 2 (det eneste lige primtal), 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37. Selv ud fra så få eksempler som her kunne det tyde på, at primtallene forekommer sjældnere og sjældnere, jo længere vi går frem i talrækken. Mellem 23 og 29 er der fem tal, der ikke er primtal; mellem 199 og 211 er der 11 sammensatte tal; og jo længere vi går frem, desto større intervaller finder vi af denne slags. Primtalenes voksende sjældenhed bringer naturligt det spørgsmål på bane, om det ikke kunne tænkes, at der fra et vist tal i talrækken ikke findes flere primtal overhovedet. Er det muligt, at alle tal, der er større end et vist (sandsynligvis meget stort) tal, er sammensatte? Eller bliver der ved med at dukke primtal op, om end mindre og mindre hyppigt?

Svaret på dette spørgsmål gives i Sætning 20 i *Elementernes* Bog IX: der findes uendelig mange primtal. I Euklids formulering af sætningen røbes det ikke umiddelbart, hvad han har i tankerne: »Der er flere primtal end ethvert forelagt antal af primtal«. Dette skal forstås på følgende måde: Antag, at det påstås, at antallet af primtal er endeligt, for eksempel lig med n . Euklid beviser da, at der er flere end n primtal.

Det, Euklid foretager sig her, er ret interessant. Under antagelse af, at et eller andet er tilfældet, nemlig at der netop findes n primtal, bevises det modsatte, at der ikke er n primtal, og det gøres i dette tilfælde ved at bevise, at der er flere end n primtal. Denne besynderlighed i beviset tillige med sætningens store vigtighed er grunden til, at vi har taget denne ene sætning med fra de talteoretiske bøger i Euklids *Elementer*.

Beviset for sætningen er endvidere bemærkelsesværdigt derved, at det ikke afhænger af noget af det tidligere beviste; det er en øvelse i ren logisk tænkning.

Før vi gennemfører beviset i sin fulde almindelighed, vil vi belyse det med et eksempel. Lad os antage, at en eller anden siger: »Der er endeligt mange primtal«. Dette ville berettige os til at spørge vedkommende: »Hvor mange primtal er der da?«, og hans svar herpå måtte være et eller andet bestemt tal. Vi kan antage, at han svarer: »Der er netop fire primtal«. Idet vi benytter os af Euklids metode, vil vi dernæst vise, at dersom der findes fire primtal, da findes der mindst et til, et femte primtal.

De fire primtal, der påstås at være de eneste, der findes, må naturligvis være de fire første primtal, altså 2, 3, 5 og 7. Vi danner produktet af disse fire tal — $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$ — og lægger 1 til, $210 + 1 = 211$. Det derved fremkomne tal er nu enten selv et primtal, eller også er det et sammensat tal. I dette tilfælde er det et primtal, og sætningen er derfor bevist, idet vi har fundet et femte primtal.

Lad os antage, at det påstås, at der netop findes seks primtal: 2, 3, 5, 7, 11, 13. Vi danner produktet af disse tal — $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 = 30\,030$ — og lægger 1 til: $30\,030 + 1 = 30\,031$. Dette tal er enten et primtal eller et sammensat tal, og i dette tilfælde er det sammensat. Det er derfor deleligt med et eller andet primtal, og dette primtal kan ikke være et af de oprindelige seks; thi 30 031 giver ved division med hvert af disse seks tal resten 1 (da de oprindelige primtal alle går op i 30 030). Sætningen er derfor på ny bevist, da vi har fundet et syvende primtal, nemlig det der optræder som faktor i 30 031. I vort eksempel er det søgte primtal 59, idet $30\,031 = 59 \cdot 509$ (509 er også et primtal, så vi har i virkeligheden fundet ikke blot et syvende men tillige et ottende primtal).

Euklids bevis er en generalisation af ovenstående. Påstås det, at der netop findes n primtal, da dannes produktet af disse n primtal, og der lægges 1 til. Det fremkomne tal K er enten selv et primtal eller et sammensat tal. Er K et primtal, da er sætningen bevist. Er K ikke et primtal, da må det være deleligt med et eller andet primtal, der ikke kan være et af de oprindelige n primtal; thi K giver ved division med ethvert af disse n primtal resten 1. Der er derfor fundet et nyt primtal — nemlig det, der optræder som faktor i K .

Hvorledes forholder det sig nu med bevismetoden for denne sætning? Den minder om den, der anvendes i et indirekte bevis. Vi skal vise, at antallet af primtal er større end et hvilket som helst givet tal, og vi begynder derfor med at antage det modsatte, nemlig at antallet af primtal er lig med et eller andet bestemt tal. I de eksempler, vi tidligere har set på indirekte beviser, afsluttedes beviset med, at vi nåede frem til en umulig konklusion, en absurditet. Den konklusion, vi her når frem til, er imidlertid ikke absurd i sig selv; den modsiger blot den oprindelige antagelse. Ud fra den antagelse, at der netop findes n primtal, er vi i stand til at bevise, at der mindst findes $n + 1$ primtal. Denne måde at føre et indirekte bevis på er meget effektiv; men desværre er det ikke mange steder, den kan benyttes.