ISBN 978 87 7066 827 9

Om Directionens analytiske Betegning, et Forsøg, anvendt fornemmelig til plane og sphæriske Polygoners Opløsning.

Af

Caspar Wessel, Landmaaler.

Nærværende Forsøg angaaer det Spørgsmaal, hvordan Directionen analytisk bør betegnes, eller hvordan rette Linier burde udtrykkes, naar af een eneste Ligning mellem een ubekiendt og andre givne Linier skulde kunne findes et Udtryk, der forestillede baade den ubekiendtes Længde og dens Direction.

For nogenledes at kunne besvare dette Spørgsmaal, lægger jeg til Grundvold to Sætninger, der synes mig unegtelige. Den første er: at den Directionens Forandring, der ved algebraiske Operationer kan frembringes, ogsaa bør ved deres Tegn at forestilles. Den anden: at Direction er ingen Gienstand for Algebra, uden for saavidt den ved algebraiske Operationer kan forandres. Men da den ved disse ei kan forandres (i det mindste efter den sædvanlige Forklaring), uden til den modsatte, eller fra positiv til privativ, og omvendt: saa skulde disse to Directioner alene kunne betegnes paa den bekiendte Maade, og i Hensigt til de øvrige Problemet være uopløseligt. Dette er vel ogsaa Grunden, hvorfor

ISBN 978 87 7066 827 9

ingen dermed har befattet sig.[1]) Man har uden Tvivl holdt det for utilladeligt at forandre noget i Operationernes eengang antagne Forklaring. Og derimod er intet at indvende, saalænge Forklaringen anvendes paa Størrelser i Almindelighed; men i enkelte Tilfælde, naar Størrelsernes egen Natur synes at indbyde til Operationernes nøiere Bestemmelse, og denne med Nytte kan anvendes, bør samme vel ei kaldes utilladelig; thi gaaer man fra Arithmetiken over til den geometriske Analysis, eller fra Operationer med abstracte Tal til dem med rette Linier, faaer man Størrelser at betragte, der vel kan tage imod samme, men ogsaa imod langt flere Relationer, end de, som Tallene kan have til hinanden; om man derfor nu tager Operationerne i en vidtløftigere Mening, og ei, som før, blot indskrænker dem til den Brug, at kunne foretages med Linier af samme eller modsat Retning, men udstrækker nu deres forrige indskrænkede Begreb noget videre, saa at det bliver anvendeligt, ei alene i samme Fald, som før, men ogsaa i uendelig mange flere Tilfælde; jeg siger om man tager sig denne Frihed, og dog ei derved overtræder de sædvanlige Operationsregler, saa modsiger man jo ikke derfor den første Lære om Tallene; men man udfører den kun videre, lemper sig efter Størrelsernes Natur, og iagttager den Methodes Regel, der fordrer, lidt efter lidt at gjøre en vanskelig Lære fattelig. Det bliver altsaa ingen urimelig Fordring, at Operationerne anvendte i Geometrien tages i en vidtløftigere Mening, end den man i Regnekunsten gav dem; man vil ogsaa let tilstaae, at det paa den Maade maa være mueligt at frembringe uendelig mange Forandringer i Liniernes Retning. Men just derved opnaaes (som siden

[1]) Uden det skulde være Magister Gilbert i Halle, hvis Priisskrivt over *Calculus Situs* maaskee indeholder en Forklaring over dette Æmne.

ISBN 978 87 7066 827 9

skal bevises) ei alene, at alle umuelige Operationer kan undflyes, og den paradoxe Sætning, at det Muelige maa undertiden søges ved umuelige Midler, kan oplyses, men ogsaa at Directionen af alle Linier i samme Plan kan udtrykkes ligesaa analytisk, som deres Længde, uden at Hukommelsen bebyrdes med nye Tegn eller Regler. Og da det synes upaatvivleligt, at geometriske Sætningers almindelige Rigtighed ofte bliver lettere at indsee, naar Directionen analytisk kan betegnes, og underkastes de algebraiske Operationsregler, end naar den ved Figurer, og kun i enkelte Tilfælde, skal forestilles: saa synes det ogsaa ei alene tilladeligt, men endog gavnligt, at betjene sig af Operationer, der udstrækkes til flere Linier, end de ligestilte (de af samme Retning) og de modsatte. Paa Grund heraf søger jeg

I. Først at bestemme Reglerne for saadanne Operationer;
II. Dernæst vises ved et Par Exempler deres Anvendelse, naar Linierne er i samme Plan;
III. Derefter bestemmes Directionen af Linier i forskjellige Planer ved en ny Operationsmethode, der ikke er algebraisk;
IV. Ved Hielp af denne udfindes derpaa saavel plane som sphæriske Polygoners Opløsning i Almindelighed;
V. Tilsidst udledes paa samme Maade de i den sphæriske Trigonometrie bekiendte Formler.

Dette er Hovedindholdet af denne Afhandling. Anledningen dertil var, at jeg søgte en Methode, hvorved de umuelige Operationer kunde undgaaes, og da denne var funden, anvendte jeg samme, for at overbevises om nogle bekiendte Formlers Almindelighed. Disse første Undersøgelser havde Hr. Etatsraad Tetens den Taalmodighed at gjennemlæse, og denne navnkundige Lærdes Opmuntringer, Raad og

ISBN 978 87 7066 827 9

Veiledning skylder jeg, saavel at dette Skrivt nu fremkommer mindre ufuldkomment, som og at det er værdiget, at optages i Samlingen af det Kongelige Videnskabers Selskabs Skrivter.

I.

Paa hvad Maade af givne rette Linier ved de algebraiske Operationer formeres andre, og fornemmelig hvad Retning og Tegn disse skal have.

Der gives homogene Størrelser, hvilke, naar de faae Sted hos samme Subject, forøge eller formindske hinanden paa den Maade alene, som Incrementer og Decrementer.

Der gives andre, som i samme Tilfælde kunne forandre hinanden paa utallige flere Maader. Af dette sidste Slags ere rette Linier.

Saaledes kan et Puncts Afstand fra et Plan paa utallige Maader forandres derved, at Punktet beskriver udenfor Planet en meer eller mindre inclineret ret Linie.

Er nemlig denne Linie perpendicular, det er, giør Punctets Vei en ret Vinkel med Planets Axel, saa bliver Punctet i Planets Parallel, og dets Vei har ingen Virkning paa dets Afstand fra Planet.

Er den beskrevne Linie indirect, det er, giør den en skiev Vinkel med Planets Axel, saa bidrager den et mindre Stykke end sin egen Længde til Afstandens Forlængning eller Forkortning, og kan paa uendelig mange Maader forøge eller formindske Afstanden.

Er den direct, det er i Linie med Afstanden, tillægger eller fratager den samme sin hele Længde, og er i første Fald positiv, i andet privativ.

ISBN 978 87 7066 827 9

Alle de rette Linier, som af et Punct kan beskrives, ere altsaa, i Hensigt til deres Virkning paa Punctets givne Afstand fra et udenfor Linierne opstilt Plan, enten directe eller indirecte, eller perpendiculare,[1]) alt eftersom de tillægge eller fratage Afstanden saa meget som det Hele, eller en Deel eller intet af deres egen Længde.

Da en Størrelse kaldes absolut, for saavidt den ei ved Relation til en anden, men umiddelbar antages given, saa kan i foregaaende Definitioner Afstanden kaldes den absolute Linie, og den relatives Bidrag til den absolutes Forlængning eller Forkortning kan kaldes den relatives Virkning.

Der gives endnu flere Størrelser end rette Linier, der kunne tage imod omtalte Relationer. Det var derfor ikke unyttigt, at forklare disse Relationer i Almindelighed, og at indlemme deres almindelige Begreb i Operationernes Forklaring; men da baade Kienderes Raad, dette Skrivts Indhold, og Foredragets Tydelighed fordre, ei at besvære Læseren med saa abstracte Begreb, befatter jeg mig kun med de geometriske Forklaringer alene, og siger derfor, at

§ 1.

To rette Linier adderes, naar man først føier dem sammen, saaledes at den ene begynder, hvor den anden slipper, derefter drager fra de sammenføiedes første til sidste Punct en ret Linie og antager saa denne for de sammenføiedes Sum.

Gaaer f. Ex. et Punct 3 Fod frem, og derefter 2 Fod tilbage, saa er disse to Veies Sum ikke de første 3 og sidste 2 Fod sammenføiede; men een Fod frem er Summen, for saavidt denne Vei, af samme Punct beskreven, har samme Virkning, som begge de to andre Veie.

[1]) Indifferente var mere passende, om det ikke skurrede for meget i uvante Øren.

ISBN 978 87 7066 827 9

Ligeledes naar en Triangels ene Side strækker sig fra a til b, og den anden fra b til c, maa den tredie fra a til c kaldes Summen, og maa betegnes ved ab + bc, saa at ac og ab + bc have samme Betydning, eller ac = ab + bc = — ba + bc, dersom ba er det modsatte af ab. Ere de adderte Linier directe, stemmer Definitionen fuldkommen overens med den sædvanlige. Ere de ikke directe, strider det dog ikke mod Analogien, at kalde en ret Linie to andre sammenføiedes Sum, for saavidt den har samme Virkninger, som disse. Den Betydning jeg har givet Tegnet +, er heller ikke saa usædvanlig; f. Ex i den Expression,

$$ab + \frac{ba}{2} = \tfrac{1}{2}ab$$

er $\frac{ba}{2}$ ingen Deel af Summen. Man kan derfor ogsaa sætte ab + bc = ac, uden derfor at tænke sig bc som nogen Deel af ac; ab + bc er kun det Tegn, hvorved ac forestilles.

§ 2

Naar flere end to rette Linier skal adderes, følges samme Regel; de forenes nemlig, saa at førstes sidste Punct sammenføies med det første af den anden, dennes sidste med tredies første o. s. v., derefter drages fra det Punct, hvor første begynder, til det, hvor sidste slipper, en ret Linie, og denne kaldes Summen af dem alle.

Hvad for en Linie der skal tages for den første, og hvilken for den anden, tredie o. s. v., er ligegyldigt; thi paa hvad Sted indenfor tre Planer, der gjør rette Vinkler med hinanden, en ret Linie af et Punct beskrives, har denne Linie samme Virkning paa Punctets Afstand fra hver af Planerne; følgelig bidrager een af flere adderte Linier til Positionens Bestemmelse af Summens sidste Punct lige-

ISBN 978 87 7066 827 9

saa meget, naar den er den første, som naar den er den sidste, eller hvad anden Orden den har til de andre adderte; følgelig er Ordenen i rette Liniers Addition ligegyldig, og Summen bliver alletider den samme, fordi dens første Punct antages given, og det sidste faar alletider samme Position.

Derfor kan ogsaa i dette Tilfælde Summen betegnes ved de adderte Linier forbundne med hinanden ved Tegnet $+$. Naar i en Fiirkant f. Ex. den første Side er dragen fra a til b, den anden fra b til c, den tredie fra c til d men den fierde fra a til d: saa kan sættes $ad = ab + bc + cd$.

§ 3.

Er Summen af flere Længder, Bredder og Høider $= 0$, saa er Summen af Længderne, den af Bredderne, og den af Høiderne, hver især $= 0$.

§ 4.

Productet af to rette Linier maa i alle Maader kunne formeres af den ene Factor, som den anden er formeret af den positive eller absolute Linie, der sættes $= 1$, det er:

Først maae Factorerne være af den Direction, at de begge kan optages i samme Plan som den positive Unitet.

Dernæst maa i Hensigt til Længden Productet forholde sig til den ene Factor, som den anden til Uniteten; og

Endelig, dersom man giver den positive Unitet, Factorerne og Productet et fælles første Punct, skal Productet i Hensigt til dets Retning ligge i omtalte Unitets og Factorers Plan, og afvige fra den ene Factor ligesaa mange Grader, og til samme Side, som den anden Factor afviger fra Uniteten, saa at Productets Directionsvinkel eller Afvigning fra den positive Unitet,

ISBN 978 87 7066 827 9

bliver saa stor, som Summen af Factorernes Directionsvinkler.

§ 5.

Lad $+1$ betegne den positive retlinede Unitet, og $+\varepsilon$ en vis anden Unitet, der er perpendicular paa den positive, og har samme Begyndelsespunct: saa er Directionsvinkelen af $+1 = 0$, af $-1 = 180°$, af $+\varepsilon = 90°$, af $-\varepsilon = -90°$ eller $270°$; og i Følge den Regel, at Productets Directionsvinkel er Summen af Factorernes, bliver $(+1).(+1) = +1$, $(+1).(-1) = -1$, $(-1).(-1) = +1$, $(+1).(+\varepsilon) = +\varepsilon$, $(+1).(-\varepsilon) = -\varepsilon$, $(-1).(+\varepsilon) = -\varepsilon$, $(-1).(-\varepsilon) = +\varepsilon$, $(+\varepsilon).(+\varepsilon) = -1$, $(+\varepsilon).(-\varepsilon) = +1$, $(-\varepsilon).(-\varepsilon) = -1$.

Hvoraf sees at ε bliver $= \sqrt{-1}$, og Productets Afvigning bestemmes saaledes, at ei en eneste af de almindelige Operationsregler overtrædes.

§ 6.

Cosinus til en Cirkelbue, der begynder fra det sidste Punct af dens Radius $+1$, er det Stykke af samme, eller modsatte Radius, der begynder fra Centrum, og endes perpendicular udfor Buens sidste Punkt. Sinus til samme Bue drages perpendicular paa Cosinus fra sammes sidste Punct til sidste af buen.

I Følge § 5 er altsaa Sinus til en ret Vinkel $= \sqrt{-1}$. Lad sættes $\sqrt{-1} = \varepsilon$; lad υ betegne en Vinkel, hvilken som helst; og lad sin. υ bemærke en ret Linie af samme Længde som Vinkelen υ's Sinus, men positiv, naar Vinkelens Maal endes i første halve Omkreds, og negativ, naar det endes i den sidste halve: saa følger af § 4 og 5, at ε sin. υ udtrykker Vinkelen υ's Sinus baade i Hensigt til Direction og Længde.

Hvad er matematik? 1
ISBN 978 87 7066 827 9

§ 7.

I Overeensstemmelse med § 1 og 6 er den Radius, som begynder fra Centrum, og afviger fra den absolute eller positive Unitet Vinkelen υ, saa stor som cos. υ + ε sin. υ. Men i Følge § 4 skal Productet af to Factorer, hvoraf den ene afviger fra Uniteten Vinkelen υ, og den anden Vinkelen u, afvige fra samme Unitet Vinkelen $\upsilon + u$. Altsaa naar den rette Linie cos. υ + ε sin. υ multipliceres med den rette Linie cos. u + ε sin. u, bliver Productet en ret Linie, hvis Directionsvinkel er $\upsilon + u$. Følgelig kan Productet efter § 1 og 6 betegnes ved cos. $(\upsilon + u)$ + ε sin. $(\upsilon + u)$.

§ 8.

Dette Product (cos. υ + ε sin. υ) . (cos. u + ε sin. u) eller cos. $(\upsilon + u)$ + ε sin. $(\upsilon + u)$ kan endnu udtrykkes paa en anden Maade, nemlig ved at addere i een Sum de partielle Producter, som udkomme, naar hver af de adderte Linier, hvis Sum udgiør den ene Factor, multipliceres med hver af dem, hvis Sum udgiør den anden. Saaledes bliver (cos. υ + ε sin. υ) . (cos. u + ε sin. u) = cos. υ cos. u — sin. υ sin. u + ε (cos. υ . sin. u + cos. u . sin. υ) i Følge de to bekiendte trigonometriske Formler cos. $(\upsilon + u)$ = cos. υ . cos. u — sin. υ . sin. u, og sin. $(\upsilon + u)$ = cos. υ . sin. u + cos. u . sin. υ. Disse to Formler kan med Nøiagtighed og uden stor Vidtløftighed bevises for alle Tilfælde, enten hver af Vinklerne υ og u, eller een alene er positiv, negativ, større eller mindre end en ret. De Sætninger, som af samme to Formler udledes, har følgelig ogsaa deres Almindelighed.

§ 9.

Cos. υ + ε sin. υ er i Følge § 7 en Cirkels Radius, hvis Længde er = 1, og Afvigning fra cos. 0° er Vinkelen υ;

ISBN 978 87 7066 827 9

deraf følger at $r . \cos. \upsilon + r . \varepsilon \sin. \upsilon$ betegner en ret Linie, hvis Længde er r, og hvis Directionsvinkel er $= \upsilon$; thi naar en retvinklet Triangels Catheter blive r gange større, saa bliver ogsaa Hypothenusen r gange større, og Vinklerne uforandrede; men Catheternes Sum er i Følge § 1 saa stor som Hypothenusen, altsaa er $r . \cos. \upsilon + r . \varepsilon \sin. \upsilon = r (\cos. \upsilon + \varepsilon \sin. \upsilon)$. Dette er altsaa et almindeligt Udtryk for enhver ret Linie, der ligger med Linierne $\cos. 0°$ og $\varepsilon \sin. 90°$ i samme Plan, afviger fra $\cos. 0°$ Graderne υ, og har Længden r.

§ 10.

Betegne a, b, c, d directe Linier af hvilken Længde som helst, positive eller negative, og de to indirecte $a + \varepsilon b$ og $c + \varepsilon d$ ligge i samme Plan som den absolute Unitet: saa kan deres Product findes, endogsaa naar deres Afvigning fra den absolute Unitet er ubekiendt; man behøver nemlig kun at multiplicere enhver af de adderte Linier, der udgiøre den ene Sum, med enhver af dem, som udgiøre den anden, saa vil disse Producter adderte udgiøre det søgte Product baade i Henseende til Længden og Retningen; saa at $(a + \varepsilon b) . (c + \varepsilon d) = ac - bd + \varepsilon (ad + bc)$.

B e v i i s. Lad Liniens $a + \varepsilon b$ Længde være A, og Afvigning fra den absolute Unitet υ Grader; men Liniens $c + \varepsilon d$ Længde $= C$, og Afvigning $= u$: saa er, i Følge § 9, $a + \varepsilon b = A . \cos. \upsilon + A . \varepsilon \sin. \upsilon$, og $c + \varepsilon d = C . \cos. u + C . \varepsilon \sin. u$, altsaa $a = A . \cos. \upsilon$, $b = A . \sin. \upsilon$, $c = C . \cos. u$, $d = C . \sin. u$ (§ 3); men i Følge § 4 er $(a + \varepsilon b) . (c + \varepsilon d) = A . C . [\cos. (\upsilon + u) + \varepsilon \sin. (\upsilon + u)] = A . C . [\cos. \upsilon . \cos. u - \sin. \upsilon . \sin. u + \varepsilon (\cos. \upsilon . \sin. u + \cos. u . \sin. \upsilon)]$ § 8. Følgelig, naar isteden for $A . C . \cos. u . \cos. \upsilon$ sættes $a . c$, isteden for $A . C . \sin. \upsilon . \sin. u$ sættes $b . d$, o. s. v.: udkommer det, som skulde bevises.

Hvad er matematik? 1
ISBN 978 87 7066 827 9

L&R Uddannelse EGMONT

Hvoraf følger, at skiøndt Summens adderte Linier ei alle er directe, saa behøves dog ingen Undtagelse i den bekiendte Regel, hvorpaa Æqvationernes Theorie, og den om hele Functioner og deres *Divisores simplices* grunder sig, nemlig at naar to Summer skal multipliceres med hinanden, da maa enhver af de adderte Størrelser i den ene Sum multipliceres med enhver af de adderte i den anden. Man kan altsaa være forvisset om, at naar en Æqvation angaaer rette Linier, og dens Radix har den Form $a + \varepsilon b$: da betegnes derved en indirect Linie. Men vilde man multiplicere med hinanden rette Linier, som ikke begge kunde ligge i samme Plan med den absolute Unitet: maatte omtalte Regel tilsidesættes. Dette er Aarsagen, hvorfor jeg forbigaaer saadanne Liniers Multiplication. En anden Maade at betegne deres forandrede Retning forekommer i det følgende, § 24—35.