ISBN 978 87 7066 827 9

Sinusfælden (mest for A)

Vi har set eksempler ovenfor, hvor man kan finde vinklerne i en trekant ved hjælp af sinusrelationen. Hvis man isolerer en vinkel i sinusrelationen, fx

$$\frac{\sin(A)}{a} = \frac{\sin(B)}{b}$$
$$\sin(A) = \frac{a \cdot \sin(B)}{b}$$
$$A = \sin^{-1}(...)$$

så løber vi umiddelbart ind i det problem, at den omvendte sinus-operation altid giver en spids vinkel. Men den søgte vinkel kunne måske være stump! Hvis vi forsøger at finde en stump vinkel ved hjælp af $\sin^{-1}$ kan man risikere at falde i sinus-fælden. Ifølge sætning 1 er der nemlig to vinkler, der har den samme sinus-værdi: Den ene af disse vinkler er spids og den anden stump (og tilsammen giver de 180°). Vi risikerer altså at vælge den forkerte af de to!

For at kunne gardere sig mod sinus-fælden er det rart at have styr på, hvilke vinkler der eventuelt kan være stumpe. Her kan følgende sætning være til stor nytte

Sætning 7
I en vilkårlig trekant vil den største side ligger overfor den største vinkel og tilsvarende vil den mindste side ligge overfor den mindste vinkel.

Hvis vi sorterer siderne efter størrelse, får vi samtidigt sorteret vinklerne efter størrelse!

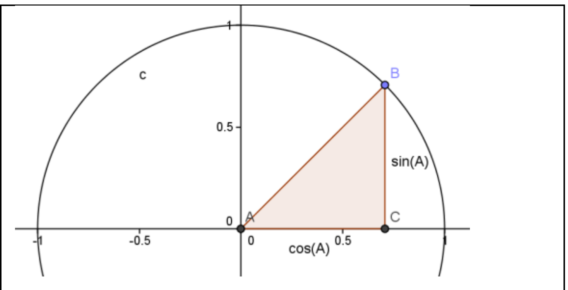
Bevis
Beviset følger netop af sinusrelationerne. Omskriv disse således:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin(A)}{\sin(B)}, \quad \frac{b}{c} = \frac{\sin(B)}{\sin(C)} \quad \text{og} \quad \frac{c}{a} = \frac{\sin(C)}{\sin(A)}$$

Heraf ser vi: Overfor den største side ligger vinklen med den største sinus. Overfor den mindste side ligger vinklen med den mindste side. Argumentet er følgende:
Hvis fx a er større end b, er brøken a/b større end 1.
Men så må tilsvarende sin(A) være større end sin(B).

Dermed er vi næste færdige, idet der for spidse vinkler gælder: Jo større vinklen er, jo større er sinus-værdien (se figuren).
Dermed er sætning 4 vist for spidse vinkler.

Men når vinklen bliver større end en ret vinkel, begynder sinus-værdien at falde. Så vi skal passe på med en stump vinkel.



ISBN 978 87 7066 827 9

Antag nu vinkel A er stump. Så finder vi

$$\sin(A) = \sin(180 - B - C)$$
$$\sin(A) = \sin(180 - (B + C))$$
$$\sin(A) = \sin(B + C)$$

Vinklerne *B, C* og $B + C$ er alle spidse vinkler. Nu bruger vi argumentet ovenfor på *B* og *C* :
$B + C$ er både større end *B* og større end *C*.
Derfor er $\sin(B + C)$ større end såvel sin(*B*) og sin(*C*).
Men da $\sin(A) = \sin(B + C)$ gælder så også, at sin(*A*) er større end såvel sin(*B*) og sin(*C*). Konklusion: Hvis *A* er stump er sin(A) altså den største sinus-værdi og det viser igen at overfor den største vinkel ligger den største side.

◊

Denne simple sætning gør det ofte nemt at styre uden om problemerne med stumpe vinkler, idet der kun kan være én stump vinkel i en trekant – og den kan man jo bare finde ud fra vinkelsummen på 180°.

Eksempel 8.33
Vi vender tilbage til trekanten fra øvelse 8.16 med målene:

$$\angle A = 50°,\ a = 13 \text{ og } c = 6\,.$$

Hvis vi ikke konstruerer trekanten men blot tegner en skitse, hvordan kan vi så vide om vinklerne $\angle B$ og $\angle C$ er spidse?

Det kan vi ikke umiddelbart afgøre ud fra skitsen, men udnytter vi at siden *c* er mindre end siden *a* får vi også at vinklen *C* er mindre end vinklen *A* og dermed er vinklen *C* i hvert fald spids.
Vi kan derfor roligt finde $\angle C$ ved hjælp af sinusrelationen og dernæst $\angle B$ ud fra vinkelsummen.