

## Kvadratsætninger og længder

### Sætning 17: Kvadratsætninger og længder af vektorer

Der gælder følgende vigtige formler for alle vektorer:

$$1) (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a}^2 - \vec{b}^2$$

$$2) (\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + 2 \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b}) \quad \text{og} \quad (\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 - 2 \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b})$$

$$3) \vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$$

*Bemærk.* vi skriver skalarproduktet af en vektor med sig selv som  $\vec{a}^2$ , ligesom vi gør med tal.

Bevis

1) Udnyt den distributive og den kommutative lov flere gange:

$$\begin{aligned} & (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) \\ &= (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{a} - (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{b} \\ &= \vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) - \vec{b} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) \\ &= \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b} \cdot \vec{a} - \vec{b} \cdot \vec{b} \\ &= \vec{a}^2 - \vec{b}^2 \end{aligned}$$

2. Viser efter samme princip

3) Udnyt definitionen på skalarproduktet,  $\vec{a}^2 = \vec{a} \cdot \vec{a}$ : til at udregne skalarproduktet af en vektor med sig selv:

$$\vec{a}^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = a_1 \cdot a_1 + a_2 \cdot a_2 = a_1^2 + a_2^2 = |\vec{a}|^2$$