ISBN 978 87 7066 827 9

L&R Uddannelse
EGMONT

Bevis for sætning 16 – regneregler for skalarprodukt

Sætning 16: Regneregler for skalarproduktet
Der gælde følgende regneregler for skalarproduktet:
1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$. Vi siger, at skalarproduktet opfylder den *kommutative lov*.
2) $(s\cdot\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(s\cdot\vec{b})=s\cdot(\vec{a}\cdot\vec{b})$. Vi siger, at skalarproduktet opfylder reglen om at gange en skalar *s* på.
3) $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$. Vi siger, at skalarproduktet opfylder den *distributive lov*.

Bevis.
Vi indfører koordinaterne:

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix},\ \vec{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}\ \text{og}\ \vec{c}=\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix}$$

1) Vi udnytter definitionen:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2$$
$$\vec{b}\cdot\vec{a}=b_1\cdot a_1+b_2\cdot a_2$$

Indenfor de reelle tal gælder den kommutative lov: rækkefølgen er ligegyldig ved produkt.
Derfor er de to højresider ens. Men så er også venstresiderne ens

2) Vi har fra sætning 4, at $s\cdot\vec{a}=\begin{pmatrix}s\cdot a_1\\s\cdot a_2\end{pmatrix}$, og $s\cdot\vec{b}=\begin{pmatrix}s\cdot b_1\\s\cdot b_2\end{pmatrix}$.

Derfor er

$$(s\cdot\vec{a})\cdot\vec{b}=(s\cdot a_1)\cdot b_1+(s\cdot a_2)\cdot b_2=s\cdot a_1\cdot b_1+s\cdot a_2\cdot b_2$$
$$\vec{a}\cdot(s\cdot\vec{b})=a_1\cdot(s\cdot b_1)+a_2\cdot(s\cdot b_2)=a_1\cdot s\cdot b_1+a_2\cdot s\cdot b_2=s\cdot a_1\cdot b_1+s\cdot a_2\cdot b_2$$
$$s\cdot(\vec{a}\cdot\vec{b})=s\cdot(a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2)=s\cdot a_1\cdot b_1+s\cdot a_2\cdot b_2$$

Vi ser heraf at de tre udtryk er ens, så venstresiderne er ens.

3) Vi udregner venstre side og regner os frem til højre side:

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}\cdot\left(\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}b_1+c_1\\b_2+c_2\end{pmatrix}=a_1\cdot(b_1+c_1)+a_2\cdot(b_2+c_2)=$$
$$a_1\cdot b_1+a_1\cdot c_1+a_2\cdot b_2+a_2\cdot c_2=a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2+a_1\cdot c_1+a_2\cdot c_2=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$$

Dermed er de tre formler vist.