ISBN 978 87 7066 827 9

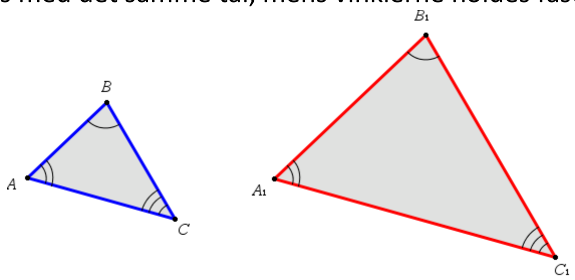
Om ensvinklede og ligedannede trekanter

Vi vil her give et bevis for sætningen, der siger at for trekanter er begreberne ensvinklet og ligedannet det samme. Sætningen er langt fra trivial – trekanter er den eneste polygon, som dette gælder for! Tænk fx på firkanter – et aflangt rektangel og et kvadrat er ensvinklede men langt fra ligedannede.

Sætning 11: Ensvinklede og ligedannede trekanter

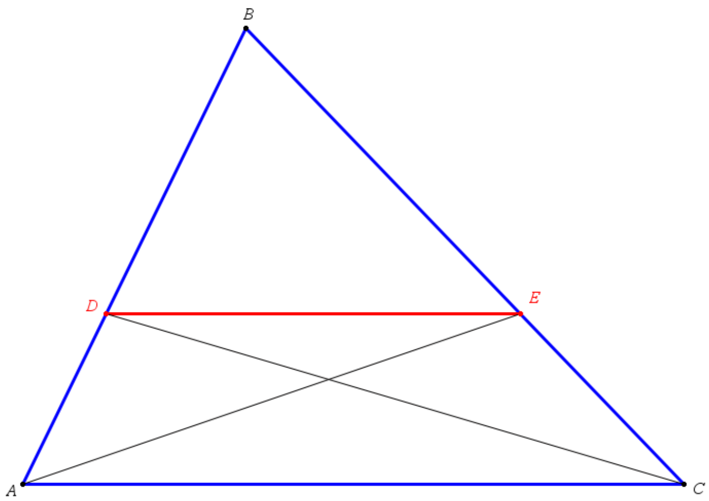
1. Hvis to trekanter *ABC* og $A_1B_1C_1$ er *ensvinklede*, så er de også *ligedannede.*
2. Hvis to trekanter er *ligedannede*, så er de også *ensvinklede*.

Allerede Thales, der levede flere århundreder før Euklid, vidste, at ensvinklede trekanter også er ligedannede, dvs. den ene trekant kan skaleres, så vi får den anden trekant. En skalering sker ved, at samtlige siders længde ganges med det samme tal, mens vinklerne holdes fast.



I Euklids Elementer Bog VI finder vi sætningerne, som svarer til ovenstående, nemlig sætning VI.4 og sætning VI.5.
For at kunne bevise disse to sætning har vi brug for endnu en sætning, som vi først beviser, nemlig:

Euklids sætning 2, Bog VI
En linje parallel med en side i en trekant deler de to andre sider i det samme forhold. Og omvendt gælder også, at hvis en linje deler to sider i en trekant i samme forhold, så er linjen parallel med den tredje side i trekanten.



Bevis:
Vi skal altså vise, at:

$$DE \parallel AC \text{ netop hvis } \frac{|AD|}{|DB|} = \frac{|CE|}{|EB|}$$

ISBN 978 87 7066 827 9

Vi vil vise de to påstande:

1) Hvis $DE \parallel AC$, så er $\frac{|AD|}{|DB|} = \frac{|CE|}{|EB|}$ og 2) Hvis $\frac{|AD|}{|DB|} = \frac{|CE|}{|EB|}$, så er $DE \parallel AC$

hver for sig.
Vi udnytter, at to trekanter har samme areal, hvis længden af grundlinjerne og højderne er ens (Euklid sætning 31, Bog I).
ΔDAE og ΔEDC har *DE* som fælles grundlinje, og højderne på *DE*´s forlængelse er også ens, fordi *DE* og *AC* er parallelle, dvs. arealerne af de to trekanter må være ens, dvs. $T_{\Delta DAE} = T_{\Delta EDC}$.
Hvis to trekanter har samme højde må forholdet mellem deres arealer være det samme som forholdet mellem grundlinjerne.
ΔDBE og ΔADE har samme højde på grundlinjen *AB*, og derfor gælder:

$$\frac{|AD|}{|DB|} = \frac{T_{\Delta AED}}{T_{\Delta EBD}} = \frac{T_{\Delta EDC}}{T_{\Delta EBD}}$$

På samme måde finder vi at:

$$\frac{|EC|}{|EB|} = \frac{T_{\Delta EDC}}{T_{\Delta EBD}}$$

Kombination af de to ligninger beviser, at hvis $DE \parallel AC$, så er $\frac{|AD|}{|DB|} = \frac{|EC|}{|EB|}$, dvs. vi har vist 1).

Vi skal nu vise sætningens anden påstand, dvs. at hvis $\frac{|AD|}{|DB|} = \frac{|EC|}{|EB|}$, så er $DE \parallel AC$.

Vi antager således, at linjestykket *DE* deler trekantens sider i samme forhold, og vi skal så vise, at siderne *DE* og *AC* er parallelle.

Der gælder altså, at $\frac{|AD|}{|DB|} = \frac{|EC|}{|EB|}$ og anvender vi igen, at forholdet mellem arealerne af trekanter med samme højde er lig med forholdet mellem grundlinjerne, så får vi igen, at:

$$\frac{T_{\Delta AED}}{T_{\Delta EBD}} = \frac{T_{\Delta EDC}}{T_{\Delta EBD}}$$

og dermed at $T_{\Delta AED} = T_{\Delta EDC}$.
Men ΔAED og ΔEDC har samme grundlinje, nemlig *DE*, og da de har samme areal, må de også have samme højde på *DE*´s forlængelse. Altså har *A* og *C* samme vinkelrette afstand til *DE*, og derfor må *AC* og *DE* være parallelle, dvs. $DE \parallel AC$. Hermed har vi vist 2).

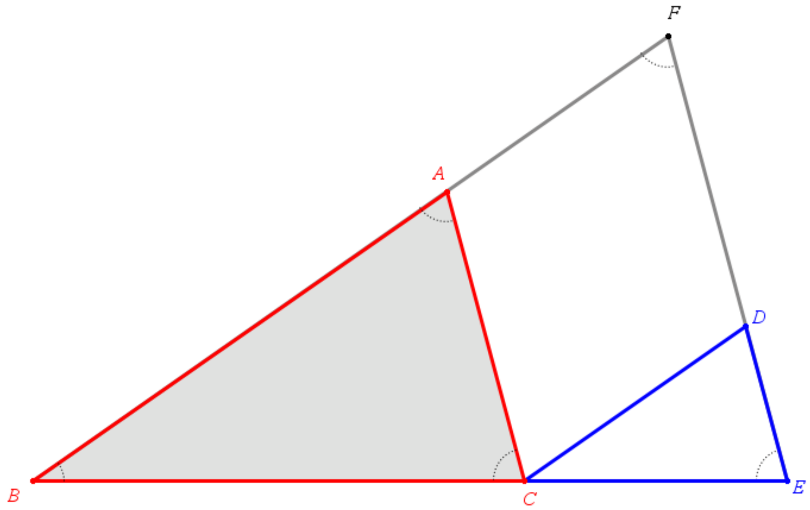
Euklids sætning 4, Bog VI (svarer til vores sætning 1, 2.)

I ensvinklede trekanter er ensliggende sider proportionale. Ensliggende er de sider, der ligger over for lige store vinkler.

Bevis:

Betragt figuren nedenfor. ΔABC og ΔDCE er ensvinklede, idet:

$$\angle ABC = \angle DCE\ ,\ \angle BAC = \angle CDE \text{ og } \angle ACB = \angle CED$$



Trekanterne er placeret, så *CE* ligger i forlængelse af *BC*. *BA* forlænges ud over *A*, og *ED* forlænges ud over *D*. Herved fremkommer skæringspunktet *F*. Da trekanterne er ensvinklede, følger det nu af Euklids 5. postulat:

Hvis et linjestykke skærer to rette linjer, så de danner to indre vinkler på hver side, som tilsammen er mindre end to rette vinkler, så vil de to linjer, hvis de forlænges uendeligt, mødes på den side, hvor de to vinkler er mindre end to rette vinkler.

at *ACDF* er et parallelogram.

Da linjestykkerne *AC* og *EF* er parallelle gælder ifølge Euklids sætning 2, Bog VI, at:

$$\frac{|BA|}{|AF|} = \frac{|BC|}{|CE|}$$

og, da $|AF| = |CD|$ betyder det, at:

$$\frac{|BA|}{|CD|} = \frac{|BC|}{|CE|}$$

Ifølge Euklids sætning 16, Bog V, gælder der, at: *Hvis fire størrelser er indbyrdes proportionale, så er deres indbyrdes forhold også propotionale*. Dvs. vi kan omskrive ovenstående til:

$$\frac{|BA|}{|BC|} = \frac{|CD|}{|CE|}$$

På samme måde ser vi, at da linjestykkerne *CD* og *BF* er parallelle, gælder der ifølge Euklid sætning 2, Bog VI, at:

$$\frac{|BC|}{|CE|} = \frac{|FD|}{|DE|}$$

og, da $|FD| = |AC|$ betyder det, at:

ISBN 978 87 7066 827 9

$$\frac{|BC|}{|CE|} = \frac{|AC|}{|DE|}$$

Anvender vi igen Euklids sætning 16, Bog V, gælder der, at:

$$\frac{|BC|}{|AC|} = \frac{|CE|}{|DE|}$$

Da $|BC|$ og $|CE|$ er proportionale med både $|BA|$ og $|CD|$ samt med $|AC|$ og $|DE|$, så må der også gælde, at:

$$\frac{|BA|}{|CD|} = \frac{|AC|}{|DE|}$$

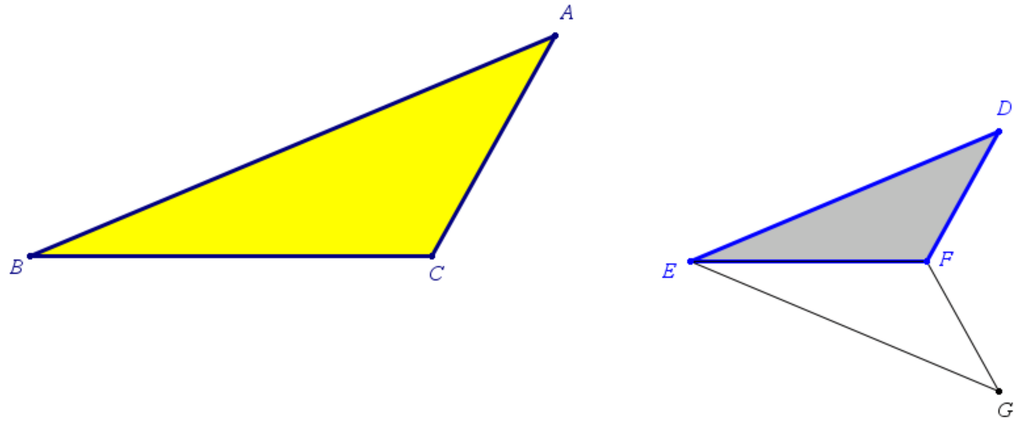
Vi har således vist den ene af proportionaliteterne, og de øvrige kan vises på samme måde.

Euklids sætning 5, Bog VI (svarer til vores sætning 1, 1.)

Hvis siderne i to trekanter er proportionale, så er trekanterne ensvinklede.

Bevis:

Betragt nedenstående figur.



I ΔABC *og* ΔDEF er siderne proportionale:

$$\frac{|BA|}{|ED|} = \frac{|BC|}{|EF|} \quad \text{og} \quad \frac{|BC|}{|EF|} = \frac{|CA|}{|FD|}$$

Vi skal vise, at ΔABC og ΔDEF er ensvinklede. Til det formål konstrueres ΔEGF, så den er ensvinklet med ΔABC, det vil sige så $\angle FEG = \angle ABC$ og $\angle EFG = \angle ACB$.

Det er nu tilstrækkeligt at vise, at ΔFEG og ΔDEF er ensvinklede.

Hvis vi anvender Euklids sætning 4, Bog VI på de to ensvinklede trekanter ΔABC og ΔFEG, så får vi:

$$\frac{|BA|}{|EG|} = \frac{|BC|}{|EF|}$$

og da $\frac{|BA|}{|ED|} = \frac{|BC|}{|EF|}$, så må der gælde, at:

$$\frac{|BA|}{|EG|} = \frac{|BA|}{|ED|}$$

og dermed, at $|EG| = |ED|$.

ISBN 978 87 7066 827 9

På samme måde kan vi vise, at $|FG|=|FD|$. Da den sidste side *EF* er fælles for de to trekanter ΔFEG *og* ΔDEF, så er alle tre sider i de to trekanter ens, og dermed er de kongruente (Euklids sætning 4 og 8, Bog I), og dermed er de specielt også ensvinklede.
Hermed har vi vist at trekanterne ΔABC *og* ΔDEF er ensvinklede.