Hvad er matematik? 1
ISBN 978 87 7066 827 9

L&R Uddannelse
EGMONT

Video om, Projekter om, og Beviser for Pythagoras' sætning

Sætning 7: Pythagoras´ sætning
I en retvinklet trekant *ABC*, hvor vinkel *C* er den rette, gælder følgende:

$$a^2 + b^2 = c^2,$$

eller formuleret med ord:

Kvadratet på hypotenusen er lig med summen af kvadraterne på kateterne.

Geometrisk set betyder det, at hvis man konstruerer kvadrater på hver af de to kateter, så skal summen af disse kvadraters arealer være lig med arealet af det kvadrat, man kan konstruere på hypotenusen.

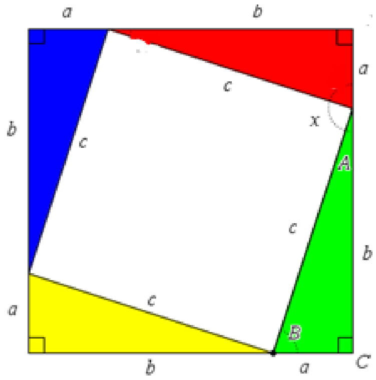
Video:

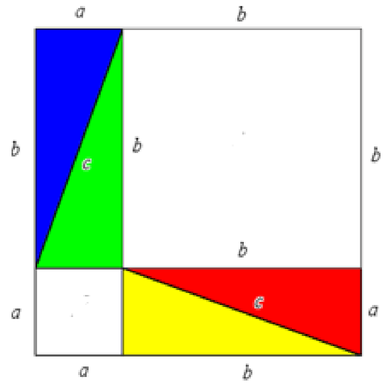
Det amerikanske universitet CalTech producerede i 1990,erne en række videoer til brug for high school undervisningen. De er stadig seværdige. I dag er de lagt ind som you tube videoer. Du kan finde listen her:
https://www.youtube.com/playlist?list=PLobzDg55jB_ua-E0VVuKsXrpLVWkkiQWc
og her fx vælge: Video om Pythagoras

ISBN 978 87 7066 827 9

Bevis nr. 1 for Pythagoras sætning – Geometrisk betragtning

Vi har givet en retvinklet trekant *ABC* (grøn), hvor vinkel *C* er den rette. Sidelængderne betegnes som sædvanligt med de til vinklerne svarende små bogstaver *a*, *b* og *c*. Vi laver nu tre kopier af denne trekant (gul, blå og rød) og lægger dem sammen med trekant *ABC* som på figur 1 nedenfor. Denne figur er et kvadrat, da vinklerne er rette, og sidelængderne alle er $a+b$.





Vi ser, at de fire retvinklede trekanter samtidig afgrænser en figur (hvid) i midten af det store kvadrat. Argumentér for at denne hvide figur er et kvadrat (lige lange sider og fire rette vinkler), idet du besvarer følgende spørgsmål:

a) Er siderne lige lange? Hvor lange er siderne?
b) Hvad ved du om vinklerne i trekant ABC? Hvor står er vinkel C? Hvad kan man så sige om summen af vinkel A og vinkel B, dvs. $\angle A + \angle B$?
c) Betragt det hjørne i den hvide figur, der ligger nederst ved den gule og den grønne trekant. Hvilke vinkler fra den gule og den grønne trekant ligger her? Hvilket gradtal dækker de tilsammen over? Hvor stort et gradtal spænder en ret linje over? Hvor stor er så vinklen i den hvid figur? Og de tre andre vinkler i den hvide figur?
d) Hvad er så arealet af den hvide figur?

Herefter tegnes endnu et kvadrat med sidelængden $a+b$, se figur 2. De fire trekanter trækkes over i dette nye kvadrat, således at de ligger som vist på figur 2. Overvej nu:

e) I figuren indgår to hvide kvadrater. Hvad er sidelængde i hver af de to kvadrater? Hvad er så arealet af hver af de to kvadrater?

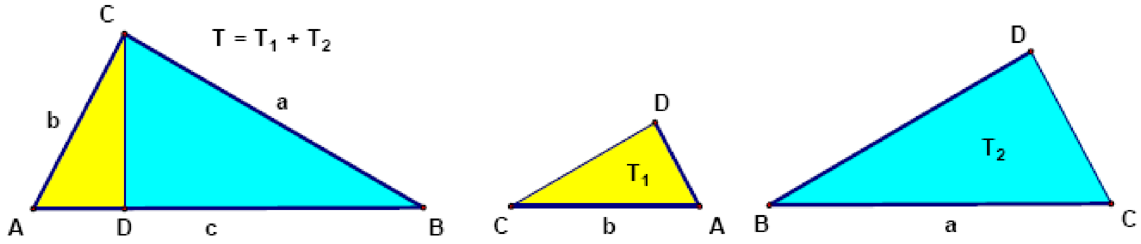
Nu sammenlignes de to figurer, dvs. de store kvadrater, og beviset fuldføres ved at besvare følgende spørgsmål:

f) Hvad er arealet af hver af de fire trekanter svarende til trekant *ABC*? Hvad er det samlede areal af de fire trekanter til sammen?
g) Betragt det store kvadrat på figur 1. Hvad er det samlede areal af hver de figurer, der ligger inden i kvadratet?
h) Betragt det store kvadrat på figur 2. Hvad er det samlede areal af hver de figurer, der ligger inden i kvadratet?
i) Når de to store kvadrater er lige store, hvad må der så gælde om det areal, du har beregnet for figur 1 henholdsvis figur 2? Sæt de to arealudtryk lig med hinanden og reducér – hvad finder du?

ISBN 978 87 7066 827 9

Bevis nr 2 for Pythagoras´ sætning – anvendelse af ligedannede trekanter

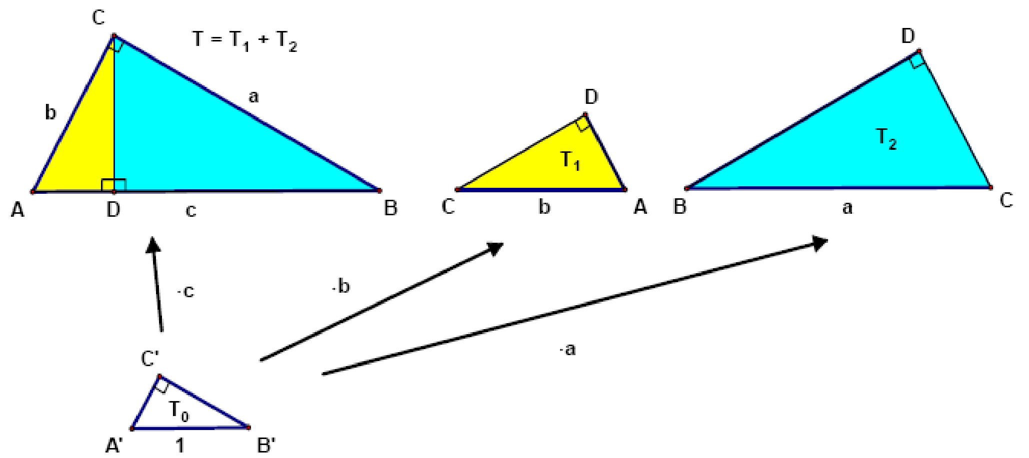
Den retvinklede trekant *ABC* deles op i to dermed ligedannede trekanter ved at trække højden fra *C*, som vist på figuren. De tre trekanter tegnes ud hver for sig:



Argumenter for, at trekanterne er ensvinklede.
Arealet af den store trekant er summen af arealerne af de to deltrekanter, dvs.

$$T = T_1 + T_2$$

Da de tre trekanter er ensvinklede, må de også være ligedannede.
Vi tegner nu en retvinklet trekant A´*B*´C´ med de samme vinkler, men med hypotenusen 1 (se figuren nedenfor). En sådan trekant kaldes en *standardtrekant*.



Vi ser da umiddelbart, at forstørrelsesfaktorerne til de tre trekanter er hhv. *c*, *b* og *a*. Det betyder, at både højde og grundlinje i hver af de forstørrede trekanter fremkommer ved at gange højde og grundlinje i standardtrekanten med hhv. *c*, *b* og *a*. Men hvis både højde og grundlinje ganges med hhv. *c*, *b* og *a*, så må det betyde at arealet af hver af de forstørrede trekanter fremkommer ved at gange arealet af standardtrekanten med hhv. c^2 , b^2 og a^2 . Dvs. der gælder følgende:

$$T = c^2 \cdot T_0 \,,\; T_1 = b^2 \cdot T_0 \text{ og } T_2 = a^2 \cdot T_0 \,.$$

Indsæt dette i ligningen: $T = T_1 + T_2$, så får vi

$$c^2 \cdot T_0 = b^2 \cdot T_0 + a^2 \cdot T_0 \,.$$

Den fælles faktor T_0 kan forkortes væk, og så har vi igen udledt Pythagoras´ sætning:

$$c^2 = a^2 + b^2 \,.$$

Projekt:

På bogens website ligger et Projekt 6.7 *Pythagoras sætning med animationer*, hvor du dels vil møde flere beviser, dels lære at lave animationer, der illustrerer beviserne. Du kan hente projektet **her**.

Pythagoras i andre kukulturer

I opgavebogens afsnit 6.4 er der en række opgaver, der viser eksempler på, at ”Pythagoras sætning” har været kendt i andre kulturer og også kendt lang tid før Pythagoras levede.