ISBN 978 87 7066 827 9

Summen af en potensrække – et geometrisk bevis

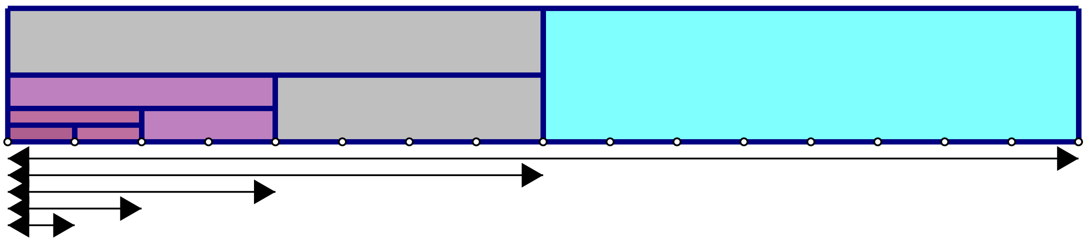
For tallet 2 har vi følgende formel:

Sætning 2
For ethvert positivt helt tal *n* gælder

$$1+2+2^2+2^3+\ldots+2^n=2^{n+1}-1$$

I grundbogen er givet et algebraisk bevis for denne formel. Her vil vi supplere med et geometrisk bevis.

Vi kigger på et langt tyndt rektangel, som vi deler op ved skridt for skridt at halvere det (tegn gerne med i dit dynamiske geometriprogram).



Hvis vi måler længden med det sidste delestykke som enhed så får delestykkerne længderne:

1, 1, 2, 4, 8

Mens hele stykket får længden 16. Overvej hvorfor længden bliver en totalspotens!

Af figuren følger nu, at der må gælde

Længden af hele stykket = summen af delestykkernes længder, dvs.

1 + 1 + 2 + 4 + 8 = 16, dvs.1 +2 + 4 + 8 = 16 – 1, dvs.

$1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 = 2^4 -1$

Det er klart, at sådan kan vi fortsætte med at halvere stykket n gange, og dermed finder vi den generelle formel

$1 + 1 + 2 + 4 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n$, dvs.

$1 +2 + 4 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n – 1$, dvs.

hvormed formlen er vist.

Beviset giver med det samme den tanke, at dette nok ikke har noget specielt med tallet 2 at gøre. Der må være en generel formel.

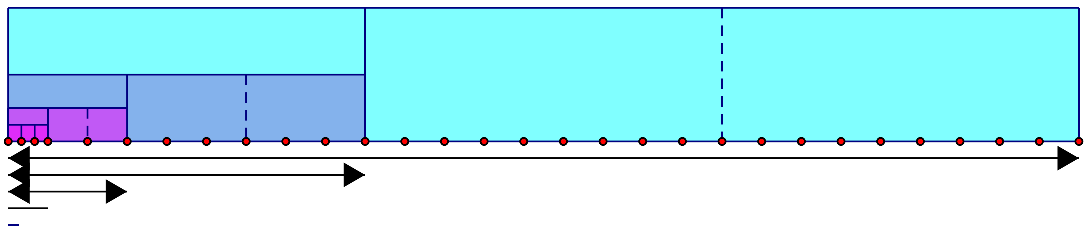
ISBN 978 87 7066 827 9

L&R Uddannelse EGMONT

Lad os prøve med tallet 3:

Øvelse 16

Vi tredjedeler et langt tyndt rektangel:



a) Hvis vi opfatter det sidste og mindste delestykke som enheden, hvilke længder får så delestykkerne? Hvilken længde får hele stykket?

b) Af figuren følger nu, at der må gælde:
Længden af hele stykket = summen af delestykkernes længder
Hvilken sammenhæng fører det til?

c) Det er nu klart at sådan kan vi fortsætte med at tredjedele stykket n gange. Hvilken generel formel finder vi herved?

d) Hvordan ser formlen ud, hvis vi i stedet successivt deler linjestykkerne i a lige store dele?

Du skulle nu have udledt formlen:

Sætning 3
For ethvert positivt helt tal n og for ethvert tal $a \neq 1$ gælder

$$1 + a + a^2 + a^3 + \ldots + a^n = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$$