Hvad er matematik? 1
ISBN 978 87 7066 827 9
website: link fra Kapitel 3, *Procent og rentesregning*, afsnit 3

L&R Uddannelse
EGMONT

Bevis for de 5 potensregneregler for de naturlige tal

I alle udregninger tager vi udgangspunkt i definitionen:

$3^6 = 3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3$

$a^n = a\cdot a\cdot\ldots\cdot a$ (på højre side står der i alt n a'er)

Generelle formel	Eksempel
1. $a^n\cdot a^m = a^{n+m}$	$3^2\cdot3^6 = 3^8$
Bevis for 1 (gangeparenteser kan sættes og hæves som vi ønsker): $a^n\cdot a^m = (a\cdot a\cdot\ldots\cdot a)_{n\ a\text{'er}}\cdot(a\cdot a\cdot\ldots\cdot a)_{m\ a\text{'er}} =$ $(a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a\cdot a)_{n+m\ a\text{'er}} = a^{n+m}$ *Forudsætninger*: Ingen, gælder for alle *a,n,m*	fordi gangeparenteser kan sættes og hæves som vi ønsker: $3^2\cdot3^6 = (3\cdot3)\cdot(3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3) = 3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3 = 3^8$
2. $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$	$\dfrac{3^6}{3^2} = 3^4$
Bevis for 2 (vi kan forkorte brøker, når tæller og nævner er skrevet som produkter): $\dfrac{a^n}{a^m} = \dfrac{(\cancel{a}\cdot\cancel{a}\cdot\cancel{a}\cdot\ldots\cdot\cancel{a}\cdot a\cdot\ldots\cdot a)_{n\ a\text{'er}}}{(\cancel{a}\cdot\cancel{a}\cdot\ldots\cdot\cancel{a}\cdot\ldots\cdot\cancel{a})_{m\ a\text{'er}}} = \dfrac{(a\cdot a\cdot\ldots\cdot a)_{n-m\ a\text{'er}}}{1} = a^{n-m}$ *Forudsætninger*: $a\neq0$ og $m\leq n$	fordi vi kan forkorte brøker, når tæller og nævner er skrevet som produkter: $\dfrac{3^6}{3^2} = \dfrac{3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3}{3\cdot3} = \dfrac{\cancel{3}\cdot\cancel{3}\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3}{\cancel{3}\cdot\cancel{3}} = \dfrac{3\cdot3\cdot3\cdot3}{1} = 3^4$
3. $(a^n)^m = a^{n\cdot m}$	$\left(3^4\right)^2 = 3^{4\cdot2} = 3^8$
Bevis for 3 (gangeparenteser kan sættes og hæves som vi ønsker): $(a^n)^m = (a^n\cdot a^n\cdot\ldots\cdot a^n)_{m\ a^n\text{'er}} =$ $\left((a\cdot a\cdot\ldots\cdot a)_{n\ a\text{'er}}\cdot(a\cdot a\cdot\ldots\cdot a)_{n\ a\text{'er}}\cdot\ldots\cdot(a\cdot a\cdot\ldots\cdot a)_{n\ a\text{'er}}\right)_{m\text{ parenteser}}$ $= (a\cdot a\cdot\ldots\cdot a\cdot\ a\cdot a\cdot\ldots\cdot a\cdot\ldots\cdot\ a\cdot a\cdot\ldots\cdot a)_{\text{i alt } n\cdot m\ a\text{'er}} = a^{n\cdot m}$ *Forudsætninger*: Ingen, gælder for alle *a,n,m*	fordi gangeparenteser kan sættes og hæves som vi ønsker: $\left(3^4\right)^2 = 3^4\cdot3^4 = (3\cdot3\cdot3\cdot3)\cdot(3\cdot3\cdot3\cdot3) =$ $3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3 = 3^{4\cdot2} = 3^8$
4. $\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$	$\dfrac{8^5}{4^5} = \left(\dfrac{8}{4}\right)^5 = 2^5$
Bevis for 4 (brøker ganges sammen ved at gange tæller med tæller, nævner med nævner): $\dfrac{a^n}{b^n} = \dfrac{(a\cdot a\cdot\ldots\cdot a)_{n\ a\text{'er}}}{(b\cdot b\cdot\ldots\cdot b)_{n\ b\text{'er}}} = \left(\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{a}{b}\cdot\ldots\cdot\dfrac{a}{b}\right)_{n\text{ brøker}} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$ *Forudsætninger*: $b\neq0$	fordi brøker ganges sammen ved at gange tæller med tæller, nævner med nævner: $\dfrac{8^5}{4^5} = \dfrac{8\cdot8\cdot8\cdot8\cdot8}{4\cdot4\cdot4\cdot4\cdot4} = \dfrac{8}{4}\cdot\dfrac{8}{4}\cdot\dfrac{8}{4}\cdot\dfrac{8}{4}\cdot\dfrac{8}{4} = \left(\dfrac{8}{4}\right)^5 = 2^5$
5. $a^n\cdot b^n = \left(a\cdot b\right)^n$	$2{,}5^5\cdot4^5 = (2{,}5\cdot4)^5 = 10^5$
Bevis for 5 (gangeparenteser kan sættes og hæves som vi ønsker, og multiplikation er kommutativ, så vi kan bytte om: $a\cdot b = b\cdot a$): $a^n\cdot b^n = (a\cdot a\cdot\ldots\cdot a)_{n\ a\text{'er}}\cdot(b\cdot b\cdot\ldots\cdot b)_{n\ b\text{'er}} =$ $(a\cdot a\cdot\ldots\cdot a\ \cdot b\cdot b\cdot\ldots\cdot b)_{n\ a\text{'er og } n\ b\text{'er}} =$ $\left((a\cdot b)\cdot(a\cdot b)\cdot\ldots(a\cdot b)\right)_{n\text{ parenteser}} = \left(a\cdot b\right)^n$ *Forudsætninger*: Ingen, gælder for alle *a,b,n*	fordi gangeparenteser kan sættes og hæves som vi ønsker, og fordi multiplikation er kommutativ (dvs: vi kan bytte rundt: $2{,}5\cdot4 = 4\cdot2{,}5$) : $2{,}5^5\cdot4^5 = (2{,}5\cdot2{,}5\cdot2{,}5\cdot2{,}5\cdot2{,}5)\cdot(4\cdot4\cdot4\cdot4\cdot4) =$ $2{,}5\cdot2{,}5\cdot2{,}5\cdot2{,}5\cdot2{,}5\cdot4\cdot4\cdot4\cdot4\cdot4 =$ $(2{,}5\cdot4)\cdot(2{,}5\cdot4)\cdot(2{,}5\cdot4)\cdot(2{,}5\cdot4)\cdot(2{,}5\cdot4) = (2{,}5\cdot4)^5 = 10^5$