**ISBN 978 87 7066 827 9**


L&R Uddannelse EGMONT

## Bevis for sætningen om lineære funktioner og deres grafer.

**Sætning 2**

1. Enhver ret linje, der ikke er lodret, er graf for en lineær funktion.

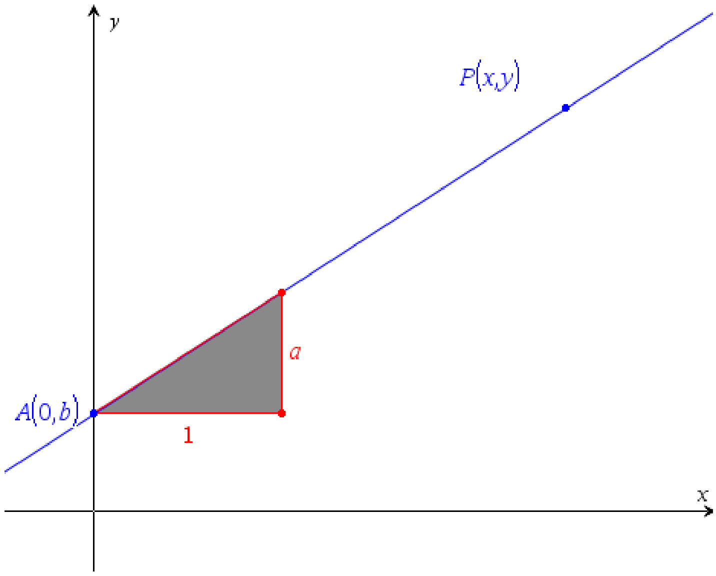
2. Grafen for en lineær funktion er en ret linje, der ikke er lodret.

(*Bemærk: Vi anvender i beviset en viden om ensvinklede og retvinklede trekanter.*)

### Bevis for punkt 1

I det følgende betragter vi en skrå ret linje med en positiv hældning, og som skærer 2. aksen i et punkt med positiv 2. koordinat. Det forenkler beviset, men den grundlæggende tankegang er den samme også i de øvrige tilfælde.

Lad os kalde linjens hældning $a$. Punktet $P(x,y)$ ligger på linjen. Vi kalder punktet, hvor linjen skærer $y$-aksen, for $A(0,b)$.




Vi kan nu danne to trekanter:

$$\Delta ABC \text{ og } \Delta APQ,$$

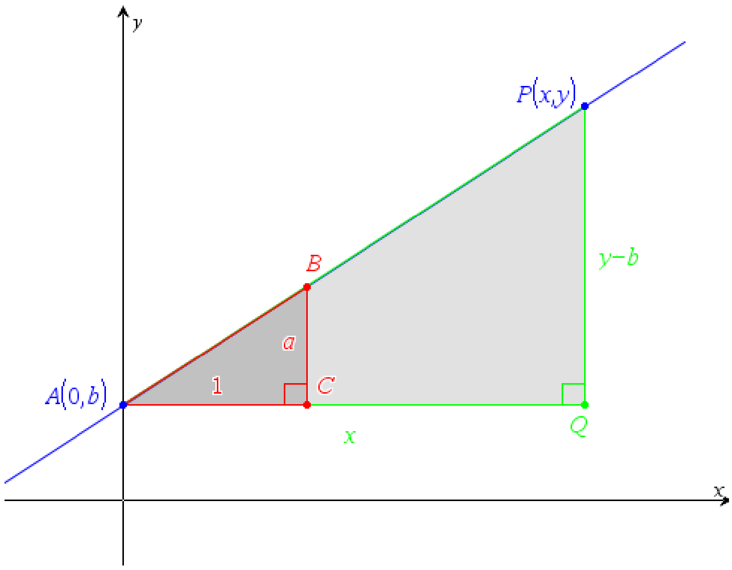
som er ensvinklede. Dvs. $\dfrac{y-b}{a}=\dfrac{x}{1}$.

Derfor må: $y-b=a\cdot x$

eller: $y=a\cdot x+b$

Altså er den rette linje graf for en lineær funktion.

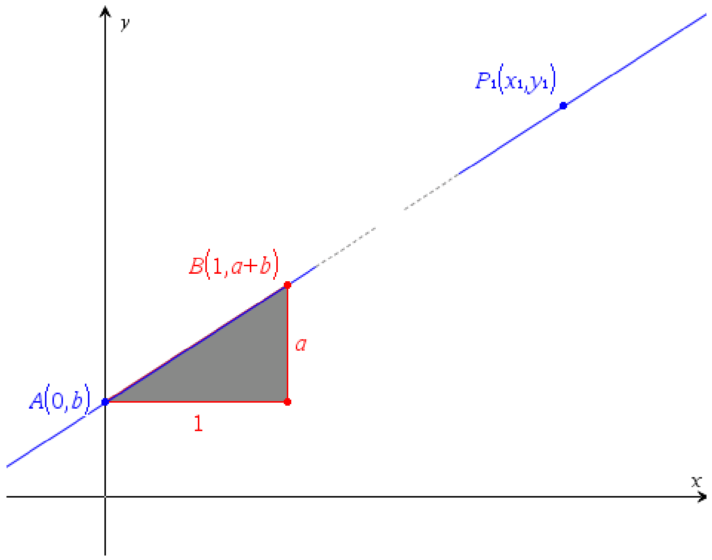
$b$ aflæses, hvor linjen skærer 2. aksen. $a$ aflæses som $y$ tilvæksten i den lille trekant, hvor $x$ vokser fra 0 til 1.



L&R Uddannelse EGMONT

## Bevis for punkt 2

Betragt en lineær funktion: $y = ax + b$ med $a$ og $b$ positive (igen en antagelse, der skal gøre det nemmere at forstå ideen bag beviset).




Ved at indsætte $x = 0$ og $x = 1$ ser vi, at punkterne $(0, b)$ og $(1, a+b)$ ligger på grafen. Vi ser nu på et vilkårligt punkt på grafen, som vi kalder $P_1(x_1, y_1)$.

Da punktet ligger på grafen, gælder der:

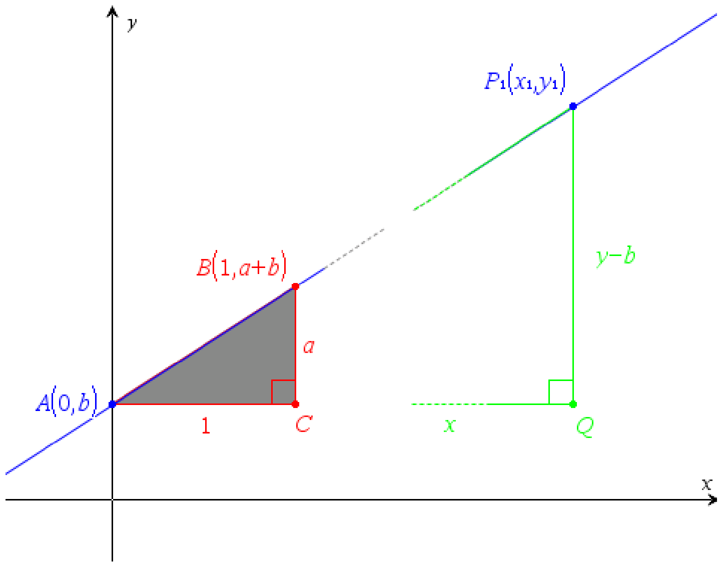
$$y_1 = a \cdot x_1 + b$$

eller: $$y_1 - b = a \cdot x_1 \quad (*)$$

Ideen i beviset er nu at argumentere for, at sigtelinjen fra $A$ til punktet $P_1$ har samme retning, som sigtelinjen fra $A$ til $B$. Kan vi vise det, så må dette altså gælde for alle punkter, fordi punktet $P_1$ er et tilfældig valgt punkt på linjen, og derfor må de ligge på linje.

Vi omskriver (*) til:

$$\frac{y_1 - b}{x_1} = a\,.$$




For at sammenligne de to trekanter $ABC$ og $AP_1Q_1$ justeres ligningens højre side lidt:

$$\frac{y_1 - b}{x_1} = \frac{a}{1} \quad (**)$$

Af denne ligning kan vi læse, at forholdet mellem siderne i den store retvinklede trekant og den lille retvinklede trekant er ens.

Men så er trekanterne jo ensvinklede, og specielt er vinklerne ved $A$ ens. Men det betyder jo med andre ord, at sigtelinjen fra $A$ til et punkt på grafen altid er den samme som sigtelinjen fra $A$ til $B$. Derfor er grafen en ret linje.

Dermed er de to påstande i sætningen bevist.