Noter til
EUKLID og PLATON om de regulære polyedre

HENRIK KRAGH SØRENSEN
Institut for Videnskabshistorie (IVH)
Aarhus Universitet, hkragh@imf.au.dk

28. juni 2001

Resumé

Formålet med denne note er at sammenfatte nogle kommentarer og oplysninger, samlet i forbindelse med øvelsesgangen om regulære polyedre hos PLATON og EUKLID i kurset *Geometriens Historie*, IVH F00.

Der vil især blive fokuseret på de fire første regulære polyedre, som hos PLATON indgår i kosmos-beskrivelsen.

Indhold

1 Konstruktion og størrelse af de regulære polyedre hos EUKLID

Hos EUKLID konstrueres de fem regulære polyedre i bog XIII:

XIII.13	Tetraeder
XIII.14	Oktaeder
XIII.15	Kube (terning)
XIII.16	Ikosaeder
XIII.17	Dodekaeder

1.1 Sidelængder

Efter hver af de tre første konstruktioner (XIII.13–XIII.15) afslutter EUKLID med at relatere sidelængden i polyedret til radius i den omskrevne kugle. Dette udtrykkes for eksempel for tetraederet ved “Kuglens Diameter i Potens er halvanden Gange Pyramidens Side” (XIII.13). Det, der derved menes er (idet s betegner sidelængden i tetraederet og d diameteren i den omskrevne kugle):

$$d^2 = \frac{3}{2}s^2.$$

På grundlag af disse relationer kan man opstille følgende tabel over forholdet mellem sidelængderne og diametrene:

Tetraeder	$d^2 = \frac{3}{2}s^2$
Oktaeder	$d^2 = 2s^2$
Terning	$d^2 = 3s^2$
Ikosaeder	$s =$<mindre>(<minor>)
Dodekaeder	$s =$<afsnit>(<apotome>)

De “højere” irrationale forhold mellem sidelængder og diameter i ikosaeder og dodekaeder benævnes (som vist) med egne navne.

Hvis man forestiller sig alle de regulære polyedre indskrevet i samme kugle med radius $r = 1$ finder man følgende tabel:

Tetraeder	$s = \frac{2}{3}\sqrt{6}$
Oktaeder	$s = \sqrt{2}$
Ikosaeder	$s = \frac{1}{5}\sqrt{10\left(5 - \sqrt{5}\right)}$
Terning	$s = \frac{2}{3}\sqrt{3}$

1.2 Volumen

For legemer bestående af ligesidede trekanter (tetraeder, oktaeder, ikosaeder) finder man ved to gange at benytte PYTHAGORAS' sætning på passende retvinklede trekanter:

$$\begin{aligned} x &= \text{radius i den om fladen omskrevne cirkel} \\ &= \frac{s}{\sqrt{3}}, \text{ og} \\ h &= \text{højde} = \text{radius i den i legemet indskrevne kugle} \\ &= \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\frac{s^2}{3}}. \end{aligned}$$

Ved hjælp af HERON's formel til beregning af trekanters areal finder man let for ligesidede trekanter

$$A = \sqrt{\frac{3}{2}s\left(\frac{3}{2}s - s\right)^3} = \sqrt{\frac{3}{2}\frac{1}{2^3}s^4} = \frac{\sqrt{3}}{4}s^2,$$

og legemets volumen beregnes som følger:

$$\begin{aligned} V_n &= n \times \frac{1}{3}A_n h_n = \frac{n}{3}\frac{\sqrt{3}}{4}s^2\sqrt{1-\frac{s^2}{3}} \\ &= \frac{n}{4\sqrt{3}}s^2\sqrt{\frac{3-s^2}{3}} = \frac{n}{12}s^2\sqrt{3-s^2}. \end{aligned}$$

For terningen finder man naturligvis direkte

$$V_6 = s_6^3,$$

og man bemærker, at kuglens volumen er

$$V_K = \frac{4}{3}\pi \simeq 4,1888.$$

Dermed kan man opstille følgende tabel over volumen af de fire første regulære polyedre indskrevet i samme kugle med radius $r = 1$:

n	Navn	s_n	V_n	$V_n \simeq$
4	Tetraeder	$\frac{2}{3}\sqrt{6}$	$\frac{8}{27}\sqrt{3}$	0.5132
8	Oktaeder	$\sqrt{2}$	$\frac{4}{3}$	1.3333
20	Ikosaeder	$\frac{1}{5}\sqrt{10\left(5-\sqrt{5}\right)}$	$\frac{2}{3}\left(\sqrt{5}-1\right)\sqrt{2\sqrt{5}+5}$	2.5362
6	Terning	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$	$\frac{8}{9}\sqrt{3}$	1.5396

(1)

2 Tilordning af regulære polyedre til elementerne hos TIMAIOS

TIMAIOS tildeler regulære polyedre til de fire elementer ild, luft, vand og jord i en passage (Platon *Timaios*, 69–70), som vi skal vende tilbage til. Først argumenteres imidlertid for eksistensen af de to ekstreme elementer, ild og jord. Dernæst argumenteres for nødvendigheden af to forbindende elementer, idet legemerne er *rumlige*. Disse to forbindende elementer kræves at være sammenhængende mellemproportionale:

> "Derfor anbragte Gud Vand og Luft imellem Ild og Jord og gjorde dem saa vidt muligt proportionale med hinanden, saa at Luft forholder sig til Vand som Ild til Luft, og Vand forholder sig til Jord som Luft til Vand" (Platon *Timaios*, 42)

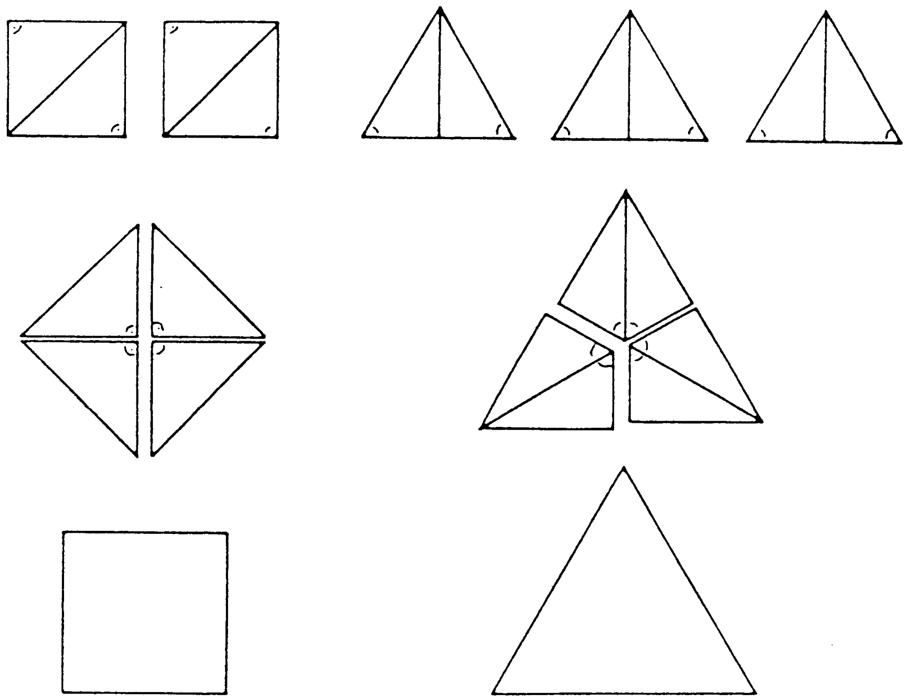
Man kunne forestille sig, at disse sammenhængende mellemproportionaler faktisk var realiseret af de regulære polyedres volumen indskrevet i samme kugle, men som det fremgår af tabellen (1), er dette ikke tilfældet. I stedet kan det *måske* tages som et udtryk for, hvor store *mængder* af hvert stof, der forekommer i universet.

Idet han når til at tildele de regulære polyedre til hver sit element kommer hans argumentation til i høj grad at bygge på geometriske overvejelser. TIMAIOS fremsætter en tiltalende *teori*, ifølge hvilken alle fladerne i de regulære polyedre er opbygget af to specielt pæne retvinklede trekanter, nemlig halvdelen af et kvadrat og halvdelen af en ligesidet trekant. Siderne i de regulære polyedre opbygges da af henholdvis 4 halve kvadrater, som sammenstilles til at give et kvadrat, og 6 halve ligesidede trekanter, som sammenstilles til at give en ny ligesidet trekant (se figur 1). Hvorfor TIMAIOS ikke blot sammenføjer *to* af hver af de elementære trekanter er ikke klart, men måske kan det skyldes at symmetrien forøges (med 3 hhv. 2 rotationer) ved den anvendte konstruktion.

Præcist, hvorfor disse trekanter er så pæne argumenteres der ikke udtrykkeligt for. Men som Artmann and Schäfer 1993 påpeger, forholder vinklerne i disse basale trekanter sig henholdsvist som $1:1:2$ og $1:2:3$, hvilket går godt i tråd med PYTHAGORAS' lære om harmoniske forhold (forhold mellem små naturlige tal) i naturen.

I forbindelse med tilordningen af regulære polyedre til de fire elementer, starter TIMAIOS med elementet jord, som han tilordner terningen:

> "Jord vil vi give den kubiske Figur, for af de fire Slags er Jord den mest ubevægelige og den mest plastiske, og den Figur, der bedst



Figur 1: (Artmann and Schäfer 1993, figur 1, 259)

svarer til denne Beskrivelse, maa være den, der har de mest stabile Flader." (Platon *Timaios*, 69–70)

Derefter tilordnes de legemer, hvis flader er sammensat af halve ligesidede trekanter, efter tre kriterier: bevægelighed, størrelse, og "spidshed". Bevægelighed måles med antallet af flader, således at det mest bevægelige legeme er det, der har færreste antal flader, og det gør den også til den spidseste. TIMAIOS ordner altså legemerne efter tre kriterier:

Mest bevægelige	Mest spidse	Mindste
Ild (tetraeder: 4 flader)	Ild	Ild
Luft (oktaeder: 8 flader)	Luft	Luft
Vand (ikosaeder: 20 flader)	Vand	Vand

Hvilket mål, der er anlagt til polyedrenes størrelse, fremgår ikke direkte, men illustreres af følgende tabel byggende på (1), som angiver volumen af de forskellige polyedre indskrevet i en fælles kugle med radius 1:

Navn	Element	Volumen
Tetraeder	ild	0.5132
Oktaeder	luft	1.3333
Terning	jord	1.5396
Ikosaeder	vand	2.5362

2.1 Dodekaederet

Om dodekaederet konstaterer TIMAIOS blot efter konstruktionen af de fire første regulære polyedre:

> "Tilbage var endnu een Konstruktion, den femte, og den brugte Gud til Verdensaltets Kugle og tegnede Billeder paa den." (Platon *Timaios*, 69)

De tegnede billeder referer til stjernebillederne, og det er muligt, at man har benyttet en inddeling af himmelkuglen i 12 pentagonale afsnit (Platon *Timaios*, fodnote 3, 69). Det eneste andet tidspunkt[1] formen optræder på i PLATON's skrifter i er dialogen *Faidon*, hvor SOKRATES udtaler:

> "SOKRATES: Det fortælles nu for det første, at den virkelige Jord set fra oven ser ud som en af de Bolde, der er syet sammen af tolv Stykker Læder..." (Platon *Faidon*, 231)

Således ser forbindelsen til æteren ud til at være knyttet senere.

3 Sammenblanding af *det udelelige* og *det delelige* hos TIMAIOS

3.1 Proportionerne

TIMAIOS konstruerer to serier af hele tal:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 2 & & 3 & & \\ & 4 & & & & 9 & \\ 8 & & & & & & 27 \end{array}$$

Ud fra den samlede serie af led fordeler TIMAIOS så portioner af blandingen af *det udelelige* og *det delelige*.

> "Dernæst udfyldte han baade de dobbelte og de tredobdelte Intervaller, idet han stadig skar Portioner af Blandingen og anbragte dem imellem Leddene, saa at der i hvert Interval blev to Mellemled: ved det ene var Forskellen mellem Mellemleddet og de to Yderled een og samme Del af henholdsvis første og sidste Yderled, ved det andet var

[1] Som jeg har kunnet finde.

> Forskellen mellem Mellemled og de to Yderled det samme Tal. Disse Led fremkaldte Intervaller paa $\frac{3}{2}$ og $\frac{4}{3}$ og $\frac{9}{8}$ indenfor de oprindelige Intervaller. Intervallerne paa $\frac{4}{3}$ udfyldte han allesammen med Intervallet paa $\frac{9}{8}$, saadan at der i hvert af dem blev en Brøkdel tilbage. Det tiloversblevne Interval, der dannedes af Brøkdelen, fandt sit Udtryk i Talforholdet $\frac{256}{243}$." (Platon *Timaios*, 45–46)

I serien af *dobbelte intervaller* indsættes så harmoniske (hm) og aritmetiske midler (am) på følgende måde[2]:

$$\begin{array}{cccccccccc} 1 & \text{hm} & \text{am} & 2 & \text{hm} & \text{am} & 4 & \text{hm} & \text{am} & 8 \\ & \frac{4}{3} & \frac{3}{2} & & \frac{8}{3} & 3 & & \frac{16}{3} & 6 & \end{array}$$

og tilsvarende for de *tredobbelte intervaller*:

$$\begin{array}{cccccccccc} 1 & \text{hm} & \text{am} & 3 & \text{hm} & \text{am} & 9 & \text{hm} & \text{am} & 27 \\ & \frac{3}{2} & 2 & & \frac{9}{2} & 6 & & \frac{27}{2} & 18 & \end{array}$$

Dermed opstår to nye serier, hvor jeg under serierne angiver forholdene mellem det pågældende og det foregående led:

$$\begin{array}{rcccccccccc} \textit{dobbelte intervaller}: & 1 & \frac{4}{3} & \frac{3}{2} & 2 & \frac{8}{3} & 3 & 4 & \frac{16}{3} & 6 & 8 \\ & & \frac{4}{3} & \frac{9}{8} & \frac{4}{3} & \frac{4}{3} & \frac{9}{8} & \frac{4}{3} & \frac{4}{3} & \frac{9}{8} & \frac{4}{3} \\ \textit{tredobbelte intervaller}: & 1 & \frac{3}{2} & 2 & 3 & \frac{9}{2} & 6 & 9 & \frac{27}{2} & 18 & 27 \\ & & \frac{3}{2} & \frac{4}{3} & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & \frac{4}{3} & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & \frac{4}{3} & \frac{3}{2} \end{array}$$

Intervallerne af $\frac{4}{3}$ udfyldes da med intervaller af $\frac{9}{8}$, men som udregningen

$$\frac{4}{3} = \frac{9}{8} \times \frac{9}{8} \times \frac{256}{243}$$

viser, bliver der et interval af $\frac{256}{243}$ til overs. I starten af serien af dobbelte intervaller giver dette for eksempel:

$$\begin{array}{ccccccccccccc} 1 & & & & \frac{4}{3} & & \frac{3}{2} & & & & 2 \\ & \frac{9}{8} & \frac{9}{8} & \frac{256}{243} & & \frac{9}{8} & & \frac{9}{8} & \frac{9}{8} & \frac{256}{243} & \end{array},$$

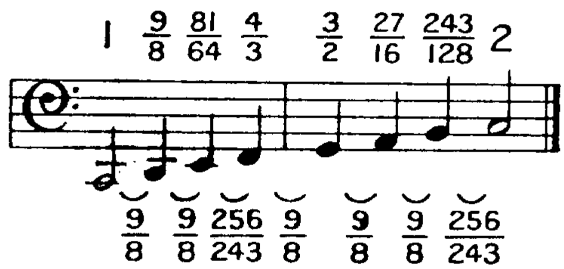
hvorefter mønsteret gentager sig ialt tre gange.

TIMAIOS forklarer ikke, hvordan de tredobbelte intervaller skal udfyldes, men det kan man se rekonstrueret i (Plato *Timaeus*, fodnote 1, 68–71), hvorfra også ovenstående er hentet.

[2]De harmoniske og aritmetiske midler er givet ved

$$hm\,(a,b) = \frac{2ab}{a+b} \text{ og } am\,(a,b) = \frac{a+b}{2}.$$

De fremkomne forhold mellem naturlige tal har en klar inspiration fra musikteorien (harmonilæren), idet forholdet $\frac{4}{3}$ svarer til *kvarten*, $\frac{3}{2}$ til *kvinten* og $\frac{2}{1}$ til *oktaven*. Endvidere har den ved intervallet mellem kvart og kvint til samme grundtone givne heltone (svarende til $\frac{9}{8}$) også anvendelse i musikteorien, hvorved også forholdet $\frac{256}{243}$ dukker op som halvtone, se f.x. (Platon *Timaios*, fodnote 1, 45) eller (Cornford 1937, 71–72), hvorfra figur 2 er hentet:



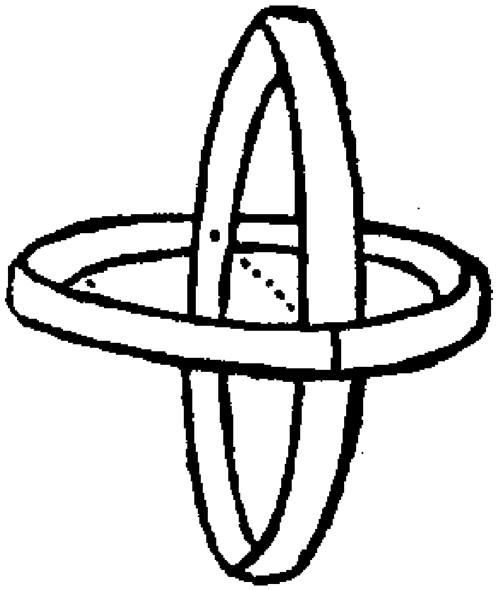
Figur 2: (Cornford 1937, 72)

3.2 Verdensbilledet

De to bånd, som TIMAIOS deler blandingen i ledsages af følgende bemærkninger indeholdt i fodnoter i den engelske udgave.

> "The accompanying figure [figur 3] indicates how the two strips were applied to each other. The place where they originally laid together across each other is, in the diagram, on the further side, and is marked by a dot; the place where the two ends of each band are joined together, and where the two bands are themselves again joined together is, in the diagram, on the near side, and is indicated by a line on the outer band. The second place of meeting is, as the dotted line indicates, immediately opposite to the first.
>
> The outer band, as Timaeus goes on to say, is the Revolution of the Same, and the inner the Revolution of the Other." (Plato *Timaeus*, fodnote 1, 71)

> "He now tilts the inner band, so that it makes an oblique angle with the outer, which is set at the horizontal; from which we see that the Revolution of the Same represents the celestial Equator, moving 'hotizontally to the right' (from East to West), and the Revolution of the Other represents the Ecliptic, which moves in a contrary direction



Figur 3: (Plato *Timaeus*, fodnote 1, 71)

> to the Equator (from West to East), and at an angle to it. The Ecliptic He divides into seven, to represent the seven planets." (Plato *Timaeus*, fodnote 1, 72)

Divisionen i syv cirkler følger forholdene listet i de dobbelte og tredobbelte intervaller: 2, 3, 4, 8, 9, 27. Tre af cirklerne, repræsenterende Solen, Venus og Merkur, skal dreje med samme hastighed, mens de øvrige fire (Månen, Mars, Jupiter og Saturn) skal dreje med hastigheder, der indbyrdes og i forhold til de tre første er forskellige, men rationalt relaterede. PLATON (TIMAIOS) uddyber sine ideer senere (Platon *Timaios*, 49–51), se (Cornford 1937, 105–117).

For KEPLER's anvendelse af PLATON's ideer og *Timaios*, se (Field 1988, 1–16).

Litteratur

Artmann, B. and L. Schäfer (1993). On Plato's "Fairest Triangles" (*Timaios* 54a). *Historia Mathematica 20*(3), 255–264.

Cornford, F. M. (Ed.) (1937). *Plato's Cosmology. The Timaeus of Plato translated with a running commentary*. London: Kegan Paul, Trench, Trubner & Co. Ltd.

Duhem, P. (1976). Plato's theory of space and the geometrical composition of the elements. In M. Čapek (Ed.), *The Concepts of Space and Time*, Volume 22 of *Boston Studies in the Philosophy of Science*, pp. 21–25. Dordrecht, NL and Boston (Mass.): D. Reidel Publishing Company.

Euclid (*The Elements*). *Euclid: The Thirteen Books of The Elements*. New York: Dover Publications. 1956. 2nd ed. 3 vols. Edited by T. L. Heath.

Euklid (*Elementer*). *Euklids Elementer*. København: Nordisk Forlag. 1897–1912. 6 vols. Translated by Thyra Eibe.

Field, J. V. (1988). *Kepler's Geometrical Cosmology*. Chicago: The University of Chicago Press.

Plato (*Timaeus*). Timaeus. In *The works of Plato*, Volume 7 of *The Loeb Classical Library*, pp. 17–253. Cambridge, Massachusetts and London: Harvard University Press and William Heinemann. 1952. 12 vols. Edited by T. E. Page et al.

Platon (*Faidon*). Faidon. In volume 3 of Platon (*Skrifter*), pp. 163–239. 1955. 10 vols. Edited by C. Høeg and H. Ræder.

Platon (*Skrifter*). *Platons Skrifter*. København: C. A. Reitzels Forlag. 1955. 10 vols. Edited by C. Høeg and H. Ræder.

Platon (*Timaios*). Timaios. In volume 8 of Platon (*Skrifter*), pp. 27–112. 1955. 10 vols. Edited by C. Høeg and H. Ræder.