

Afsnit 8.1 Bevis for sætningen om lineære funktioner og deres grafer.

Sætning 2

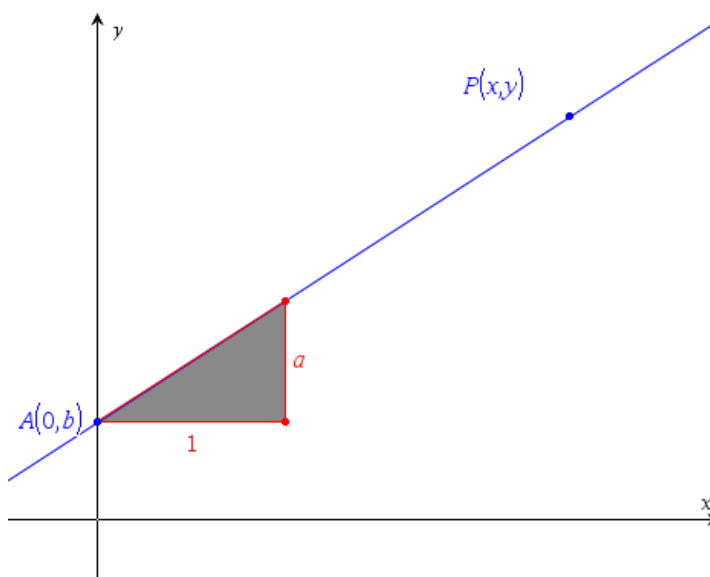
1. Enhver ret linje, der ikke er lodret, er graf for en lineær funktion.
2. Grafen for en lineær funktion er en ret linje, der ikke er lodret.

(Bemærk: Vi anvender i beviset en viden om ensvinklede og retvinklede trekanter.)

Bevis for punkt 1

I det følgende betragter vi en skrå ret linje med en positiv hældning, og som skærer 2. akse i et punkt med positiv 2. koordinat. Det forenkler beviset, men den grundlæggende tankegang er den samme også i de øvrige tilfælde.

Lad os kalde linjens hældning a .
Punktet $P(x,y)$ ligger på linjen.
Vi kalder punktet, hvor linjen skærer y -aksen, for $A(0,b)$.



Vi kan nu danne to trekanter:

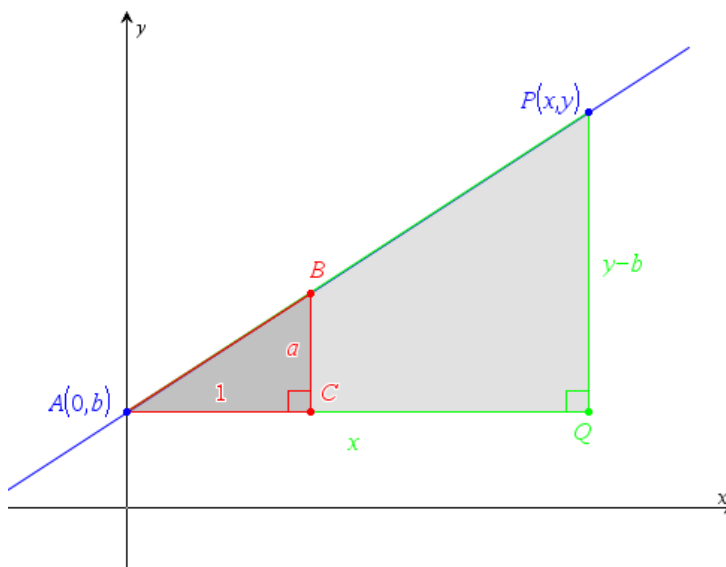
$$\triangle ABC \text{ og } \triangle APQ,$$

som er ensvinklede. Dvs. $\frac{y-b}{a} = \frac{x}{1}$.

Derfor må: $y-b = a \cdot x$
eller: $y = a \cdot x + b$

Altså er den rette linje graf for en lineær funktion.

b aflæses, hvor linjen skærer 2. akse.
 a aflæses som y tilvæksten i den lille trekant, hvor x vokser fra 0 til 1.



Bevis for punkt 2

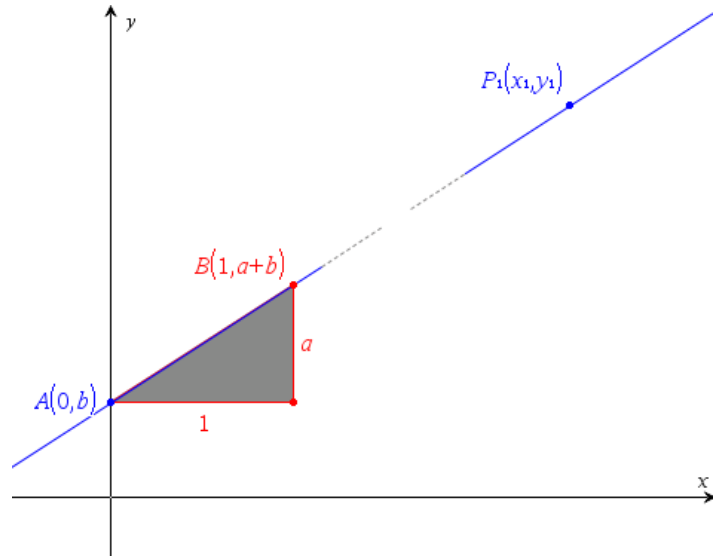
Betragt en lineær funktion: $y = ax + b$
 med a og b positive (igen en antagelse, der skal gøre det nemmere at forstå ideen bag beviset).

Ved at indsætte $x = 0$ og $x = 1$ ser vi, at punkterne $(0, b)$ og $(1, a + b)$ ligger på grafen. Vi ser nu på et vilkårligt punkt på grafen, som vi kalder $P_1(x_1, y_1)$.

Da punktet ligger på grafen, gælder der:

$$y_1 = a \cdot x_1 + b$$

eller: $y_1 - b = a \cdot x_1$ (*)



Ideen i beviset er nu at argumentere for, at sigtelinjen fra A til punktet P_1 har samme retning, som sigtelinjen fra A til B . Kan vi vise det, så må dette altså gælde for alle punkter, fordi punktet P_1 er et tilfældigt valgt punkt på linjen, og derfor må de ligge på linje.

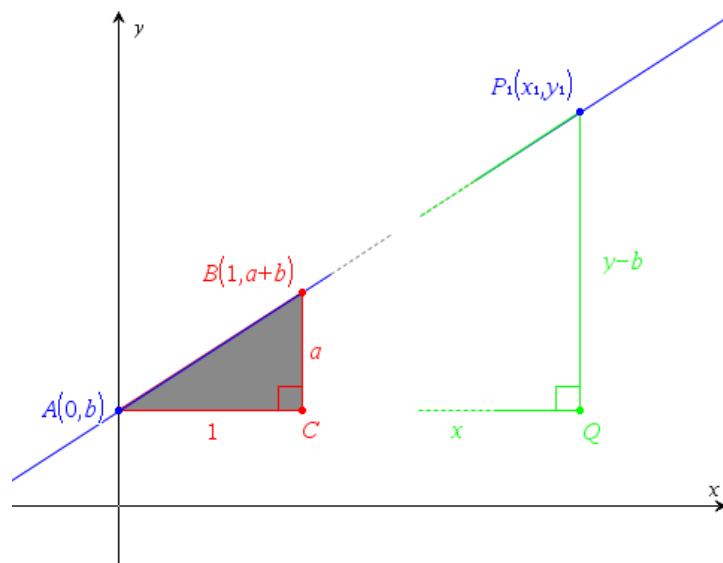
Vi omskriver (*) til:

$$\frac{y_1 - b}{x_1} = a.$$

For at sammenligne de to trekanter ABC og AP_1Q_1 justeres ligningens højre side lidt:

$$\frac{y_1 - b}{x_1} = \frac{a}{1} \quad (**)$$

Af denne ligning kan vi læse, at forholdet mellem siderne i den store retvinklede trekant og den lille retvinklede trekant er ens.



Men så er trekanterne jo ensvinklede, og specielt er vinklerne ved A ens. Men det betyder jo med andre ord, at sigtelinjen fra A til et punkt på grafen altid er den samme som sigtelinjen fra A til B . Derfor er grafen en ret linje.

Dermed er de to påstande i sætningen bevist.