Ueber eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen.

(Von Herrn *Cantor* in Halle a. S.)

Unter einer reellen algebraischen Zahl wird allgemein eine reelle Zahlgrösse ω verstanden, welche einer nicht identischen Gleichung von der Form genügt:

$$(1.)\quad a_0\,\omega^n + a_1\,\omega^{n-1} + \cdots + a_n = 0,$$

wo $n, a_0, a_1, \cdots a_n$ ganze Zahlen sind; wir können uns hierbei die Zahlen n und a_0 positiv, die Coefficienten $a_0, a_1, \cdots a_n$ ohne gemeinschaftlichen Theiler und die Gleichung (1.) irreductibel denken; mit diesen Festsetzungen wird erreicht, dass nach den bekannten Grundsätzen der Arithmetik und Algebra die Gleichung (1.), welcher eine reelle algebraische Zahl genügt, eine völlig bestimmte ist; umgekehrt gehören bekanntlich zu einer Gleichung von der Form (1.) höchstens soviel reelle algebraische Zahlen ω, welche ihr genügen, als ihr Grad n angiebt. Die reellen algebraischen Zahlen bilden in ihrer Gesammtheit einen Inbegriff von Zahlgrössen, welcher mit (ω) bezeichnet werde; es hat derselbe, wie aus einfachen Betrachtungen hervorgeht, eine solche Beschaffenheit, dass in jeder Nähe irgend einer gedachten Zahl α unendlich viele Zahlen aus (ω) liegen; um so auffallender dürfte daher für den ersten Anblick die Bemerkung sein, dass man den Inbegriff (ω) dem Inbegriffe aller ganzen positiven Zahlen ν, welcher durch das Zeichen (ν) angedeutet werde, eindeutig zuordnen kann, so dass zu jeder algebraischen Zahl ω eine bestimmte ganze positive Zahl ν und umgekehrt zu jeder positiven ganzen Zahl ν eine völlig bestimmte reelle algebraische Zahl ω gehört, dass also, um mit anderen Worten dasselbe zu bezeichnen, der Inbegriff (ω) in der Form einer unendlichen gesetzmässigen Reihe:

$$(2.)\quad \omega_1, \omega_2, \cdots \omega_\nu, \cdots$$

gedacht werden kann, in welcher sämmtliche Individuen von (ω) vorkommen und ein jedes von ihnen sich an einer bestimmten Stelle in (2.), welche durch den zugehörigen Index gegeben ist, befindet. Sobald man ein Gesetz gefunden hat, nach welchem eine solche Zuordnung gedacht werden kann, lässt sich dasselbe nach Willkür modificiren; es wird daher genügen, wenn ich in §. 1 denjenigen Anordnungsmodus mittheile, welcher, wie mir scheint, die wenigsten Umstände in Anspruch nimmt.

Um von dieser Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen eine Anwendung zu geben, füge ich zu dem §. 1 den §. 2 hinzu, in welchem ich zeige, dass, wenn eine beliebige Reihe reeller Zahlgrössen von der Form (2.) vorliegt, man in jedem vorgegebenen Intervalle $(\alpha \cdots \beta)$ Zahlen η bestimmen kann, welche nicht in (2.) enthalten sind; combinirt man die Inhalte dieser beiden Paragraphen, so ist damit ein neuer Beweis des zuerst von *Liouville* bewiesenen Satzes gegeben, dass es in jedem vorgegebenen Intervalle $(\alpha \cdots \beta)$ unendlich viele transcendente, d. h. nicht algebraische reelle Zahlen giebt. Ferner stellt sich der Satz in §. 2 als der Grund dar, warum Inbegriffe reeller Zahlgrössen, die ein sogenanntes Continuum bilden (etwa die sämmtlichen reellen Zahlen, welche $\geqq 0$ und $\leqq 1$ sind) sich nicht eindeutig auf den Inbegriff (ν) beziehen lassen; so fand ich den deutlichen Unterschied zwischen einem sogenannten Continuum und einem Inbegriffe von der Art der Gesammtheit aller reellen algebraischen Zahlen.

§. 1.

Gehen wir auf die Gleichung (1.), welcher eine algebraische Zahl ω genügt und welche nach den gedachten Festsetzungen eine völlig bestimmte ist, zurück, so möge die Summe der absoluten Beträge ihrer Coefficienten, vermehrt um die Zahl $n-1$, wo n den Grad von ω angiebt, die *Höhe* der Zahl ω genannt und mit N bezeichnet werden; es ist also, unter Anwendung einer üblich gewordenen Bezeichnungsweise:

$$(3.)\quad N = n-1 + [a_0] + [a_1] + \cdots + [a_n].$$

Die Höhe N ist darnach für jede reelle algebraische Zahl ω eine bestimmte positive ganze Zahl; umgekehrt giebt es zu jedem positiven ganzzahligen Werthe von N nur eine endliche Anzahl algebraischer reeller Zahlen mit der Höhe N; die Anzahl derselben sei $\varphi(N)$; es ist beispielsweise $\varphi(1) = 1$; $\varphi(2) = 2$; $\varphi(3) = 4$. Es lassen sich alsdann die Zahlen des Inbegriffes (ω), d. h. sämmtliche algebraischen reellen Zahlen folgendermassen anordnen; man nehme als erste Zahl ω_1 die eine Zahl mit der Höhe $N = 1$; lasse auf sie, der Grösse nach steigend, die $\varphi(2) = 2$ algebraischen reellen Zahlen mit der Höhe $N = 2$ folgen, bezeichne sie mit ω_2, ω_3; an diese mögen sich die $\varphi(3) = 4$ Zahlen mit der Höhe $N = 3$, ihrer Grösse nach aufsteigend, anschliessen; allgemein mögen, nachdem in dieser Weise sämmtliche Zahlen aus (ω) bis zu einer gewissen Höhe $N = N_1$ abgezählt und an einen bestimmten Platz gewiesen sind, die reellen algebraischen Zahlen mit der Höhe $N = N_1 + 1$ auf sie folgen und zwar der Grösse nach aufsteigend; so erhält man den Inbegriff (ω) aller reellen algebraischen Zahlen in der Form:

$$\omega_1, \ \omega_2, \cdots \omega_\nu, \cdots\cdots$$

und kann mit Rücksicht auf diese Anordnung von der νten reellen algebraischen Zahl reden, wobei keine einzige aus dem Inbegriffe (ω) vergessen ist. —

§. 2.

Wenn eine nach irgend einem Gesetze gegebene unendliche Reihe von einander verschiedener reeller Zahlgrössen:

$$(4.) \quad \omega_1, \omega_2, \cdots \omega_\nu, \cdots\cdots$$

vorliegt, so lässt sich in jedem vorgegebenen Intervalle $(\alpha \cdots \beta)$ eine Zahl η (und folglich unendlich viele solcher Zahlen) bestimmen, welche in der Reihe (4.) nicht vorkommt; dies soll nun bewiesen werden.

Wir gehen zu dem Ende von dem Intervalle $(\alpha \cdots \beta)$ aus, welches uns beliebig vorgegeben sei, und es sei $\alpha < \beta$; die ersten beiden Zahlen unserer Reihe (4.), welche im Innern dieses Intervalles (mit Ausschluss der Grenzen) liegen, mögen mit α', β' bezeichnet werden, und es sei $\alpha' < \beta'$; ebenso bezeichne man in unserer Reihe die ersten beiden Zahlen, welche im Innern von $(\alpha' \cdots \beta')$ liegen, mit α'', β'', und es sei $\alpha'' < \beta''$, und nach demselben Gesetze bilde man ein folgendes Intervall $(\alpha''' \cdots \beta''')$ u. s. w. Hier sind also α', $\alpha'' \cdots$ der Definition nach bestimmte Zahlen unserer Reihe (4.), deren Indices im fortwährenden Steigen sich befinden, und das Gleiche gilt von den Zahlen β', $\beta'' \cdots$; ferner nehmen die Zahlen $\alpha', \alpha'', \cdots$

ihrer Grösse nach fortwährend zu, die Zahlen β', β'', $\cdots$ nehmen ihrer Grösse nach fortwährend ab; von den Intervallen $(\alpha \cdots \beta)$, $(\alpha' \cdots \beta')$, $(\alpha'' \cdots \beta'')$, $\cdots$ schliesst ein jedes alle auf dasselbe folgenden ein. — Hierbei sind nun zwei Fälle denkbar.

Entweder die Anzahl der so gebildeten Intervalle ist endlich; das letzte von ihnen sei $(\alpha^{(\nu)} \cdots \beta^{(\nu)})$; da im Innern desselben höchstens eine Zahl der Reihe (4.) liegen kann, so kann eine Zahl η in diesem Intervalle angenommen werden, welche nicht in (4.) enthalten ist, und es ist somit der Satz für diesen Fall bewiesen. —

Oder die Anzahl der gebildeten Intervalle ist unendlich gross; dann haben die Grössen $\alpha, \alpha', \alpha'', \cdots$, weil sie fortwährend ihrer Grösse nach zunehmen, ohne ins Unendliche zu wachsen, einen bestimmten Grenzwerth α^∞; ein gleiches gilt für die Grössen $\beta, \beta', \beta'', \cdots$, weil sie fortwährend ihrer Grösse nach abnehmen, ihr Grenzwerth sei β^∞; ist $\alpha^\infty = \beta^\infty$ (ein Fall, der bei dem Inbegriffe (ω) aller reellen algebraischen Zahlen stets eintritt), so überzeugt man sich leicht, wenn man nur auf die Definition der Intervalle zurückblickt, dass die Zahl $\eta = \alpha^\infty = \beta^\infty$ nicht in unserer Reihe enthalten sein kann*); ist aber $\alpha^\infty < \beta^\infty$, so genügt jede Zahl η im Innern des Intervalles $(\alpha^\infty \cdots \beta^\infty)$ oder auch an den Grenzen desselben der gestellten Forderung, nicht in der Reihe (4.) enthalten zu sein. —

Die in diesem Aufsatze bewiesenen Sätze lassen Erweiterungen nach verschiedenen Richtungen zu, von welchen hier nur eine erwähnt sei:

„Ist $\omega_1, \omega_2, \cdots \omega_n, \cdots$ eine endliche oder unendliche Reihe von einander linear unabhängiger Zahlen (so dass keine Gleichung von der Form $a_1 \omega_1 + a_2 \omega_2 + \cdots + a_n \omega_n = 0$ mit ganzzahligen Coefficienten, die nicht sämmtlich verschwinden, möglich ist) und denkt man sich den Inbegriff (Ω) aller derjenigen Zahlen Ω, welche sich als rationale Functionen mit ganzzahligen Coefficienten aus den gegebenen Zahlen ω darstellen lassen, so giebt es in jedem Intervalle $(\alpha \cdots \beta)$ unendlich viele Zahlen, die nicht in (Ω) enthalten sind."

In der That überzeugt man sich durch eine ähnliche Schlussweise,

*) Wäre die Zahl η in unserer Reihe enthalten, so hätte man $\eta = \omega_p$, wo p ein bestimmter Index ist; dies ist aber nicht möglich, denn ω_p liegt nicht im Innern des Intervalles $(\alpha^{(p)} \ldots \beta^{(p)})$, während die Zahl η ihrer Definition nach im Innern dieses Intervalles liegt.

wie in §. 1, dass der Inbegriff (Ω) sich in der Reihenform:

$$\Omega_1,\ \Omega_2,\ \cdots\ \Omega_\nu,\ \cdots$$

auffassen lässt; woraus, mit Rücksicht auf diesen §. 2, die Richtigkeit des Satzes folgt.

Ein ganz specieller Fall des hier angeführten Satzes (in welchem die Reihe $\omega_1, \omega_2, \cdots \omega_n \cdots$ eine endliche und der Grad der rationalen Functionen, welche den Inbegriff (Ω) liefern, ein vorgegebener ist) ist, unter Zurückführung auf *Galois*sche Principien, von Herrn *B. Minnigerode* bewiesen worden. (Siehe Math. Annalen von *Clebsch* und *Neumann*, Bd. IV. S. 497.)

Berlin, den 23. December 1873.