

I want to be a mathematician

Interview med fire matematikere:

Tobias Holck Colding (TC; MIT) – Elisenda Feliu (EF), Søren Galatius (SG) og Ib Madsen (IM; alle KU)

Interviewer: Martin Raussen (MR; AAU)

I want to be a mathematician er titlen på den sidste film i serien: *10 danske matematikere – 10 matematiske fortællinger*. Seriens film og øvrige materialer er frit tilgængelige fra websitet, som findes ved blot at google serien. Her ligger film med Susanne Ditlevsen, Steen Markvorsen, Lisbeth Fajstrup, Olav Geil, Peter Landrock, Henrik Kragh Sørensen, Jørgen Bang-Jensen, Jan Philip Solovej og Søren Eilers. Projektets målsætning er at stimulere dygtige gymnasieelever til at studere matematikholdige fag, og derfor har det været naturligt at afslutte serien med at sætte spot på det at være matematiker. Og at låne titlen fra Paul Halmos "Automathography".

Den afsluttende film er baseret på samtaler som Martin Raussen har ført med Tobias Holck Colding, Elisenda Feliu, Søren Galatius og Ib Madsen. Denne artikel er en redigeret version af den samlede udskrift af disse samtaler. Udskrift og redigering er foretaget af Bjørn Grøn og Martin Raussen. Den endelige film vil kun rumme uddrag af samtalerne.



Tobias Colding



Elisenda Feliu



Søren Galatius



Ib Madsen

Hvor kommer interessen for matematik fra?

MR Kan I huske, hvordan jeres interesse for matematik begyndte? Og siden hvordan det var at gå fra gymnasiet til universitetet

EF Jeg har altid godt kunnet lide matematik, det var et fag jeg nød rigtig meget i skolen – men også de naturvidenskabelige fag, fysik, kemi og biologi. Det var lidt svært for mig at finde ud af, hvad jeg gerne ville læse på universitetet. Selv om jeg godt kunne lide matematik, var jeg også lidt bange for, at det matematiske studium var et kedeligt sted. Men så mødte jeg en, der læste filosofi, og som gav udtryk for det vigtige i, at mennesket lærer at tænke. Jeg kunne se, at han var interesseret i at vide ting, bare for videns skyld. Og så tænkte jeg selv: Ok, jeg kan lide matematik, og jeg vil gerne vide mere – det var *the tipping point* i mit valg af matematik.

For mig var det virkelig, virkelig rart at starte på at læse matematik. Pludselig var jeg sammen med mange mennesker ligesom mig selv. Alle kunne lide matematik, vi kunne snakke om opgaverne. Det var også lidt hårdt, men samtidig var det en befrielse, pludselig var det ok at sige, at man elsker det vi gør nu. Det kunne man ikke i gymnasiet i Barcelona. Her var man cool, hvis man sagde, at man hader matematik. Det var altså rigtig, rigtig fint at starte på studiet.

IM Min interesse for matematik går langt tilbage. Allerede da jeg var i 12-14-årsalderen var jeg fuldstændig opsat på at blive professionel matematiker. Det havde til dels at gøre med, at min mor var meget, meget glad for matematik. Hun var hjemmegående husmor, som man jo var dengang, men havde hun levet i dag, ville hun garanteret have fået en naturvidenskabelig uddannelse. Hun gav mig for det første interessen for matematik, men hun gav mig også bøger – bøger, hvor man kunne løse opgaver, men også bøger som E.T. Bells *Men of Mathematics (Matematikkens mænd)*. Og det fascinerede mig meget. Så jeg har altid været klar over, at jeg gerne ville være en professionel matematiker.

Men et af mine problemer var og er, at jeg er stærkt ordblind. Og i 1950'erne, i min skolegang, var det ikke noget der var anerkendt, så i den forstand var matematik også et (fri-)sted, hvor det ikke betød så meget, om man var ordblind eller ej. Så min skolegang var sådan, at jeg kun lige akkurat slap ind i det, der hed mellemskolen, og som var en overbygning på underskolen. Og det var også kun lige akkurat, jeg kom i gymnasiet fra mellemskolen. Da jeg så kom i gymnasiet, viste det sig meget hurtigt at jeg havde evner for matematik. Og så gik jeg fra at være regnet som en af de dårligste i mine hidtidige klasser til at være en af de bedste. Det var en noget mærkværdig oplevelse, må jeg sige. Og gymnasiet var virkelig det sted, hvor jeg blomstrede op i intellektuel forstand. Så kommer man på universitetet, i København, og opdager, at ens medstuderende, de har jo også næsten alle været blandt de allerbedste i deres klasse, måske den allerbedste. Og man opdager også, at de måske er hurtigere, bedre til at løse opgaver, end man selv er. Den overgang var lidt af et chok. Og så den måde undervisningen foregår på: Der er forelæsninger i store grupper – men trods alt også nogle øvelser i mindre grupper, hvor man også får et socialt samvær. Men det er ikke let, overgangen fra gymnasiet til universitetet er ikke nogen let sag. Sådan er det i hvert fald for mange.

SG Jeg har også så langt tilbage, som jeg kan huske, været interesseret i matematik, og også i naturvidenskab. At det så lige bliver matematik, er nok lidt mere tilfældigt: Jeg har også interesseret mig for fysik og alt det går også tilbage til grundskolen.

Overgangen til universitetet var både positiv og et mindre chok. Som Ib siger, opdagelsen af, at man ikke længere altid var den bedste. Men samtidig var der også oplevelsen af, at matematikken blev mere interessant, det føltes som en helt ny verden, der åbnede sig. Set i bakspejlet vidste jeg egentlig slet ikke rigtig noget om, hvad et universitetsstudium indebærer og hvad matematikundervisningen faktisk går ud på. Jeg vil også sige, at det var en opblomstring rent fagligt at opdage, hvor stort et landskab, der åbnede sig dér.

TC Jeg var altid glad for matematik, faktisk fra børnehaven. Der var da også andre ting jeg var interesseret i, men matematik var der altid, så det var helt naturligt for mig at vælge det studium.

I ethvert studium og i al undervisning er der selvfølgelig nogle rammer, noget man skal. Men jeg har altid sat mig mine egne mål, i hvert fald i matematik. Også i gymnasiet og i de mindre klasser. Hvis man sætter sig sine egne mål, så bliver overgangen måske mindre i hvert nyt trin. Man justerer selvfølgelig målene undervejs, men hvis man bliver ved med at sætte sig sine egne mål, så kan man måske opnå, at overgangen ikke virker så stor.

At læse matematik

MR *Begyndelsen på et matematisk studium er ret standardiseret, faktisk over hele verden, men på et eller andet tidspunkt begynder man jo at specialisere sig, og man udvikler sin egen matematiske smag. Kan I fortælle om, hvordan det foregik hos jer?*

IM Jeg begyndte på matematik i København samme år den nye studieordning af 1960 blev indført. Helt nye kurser og nyt undervisningsmateriale. Forelæsningerne og øvelserne var til tider noget kaotiske som det vel ofte er tilfældet med en ny struktur. 1. del af studiet varede tre år og bestod af i alt seks kurser. Lidt specielt i forhold til de fleste steder i udlandet, havde vi et kursus i Lebesgue integration på andetår og et kursus i operator algebra på tredje år. Men det hang nok sammen med, at matematisk analyse var det dominerende forskningsfelt i København. Dumpe procenten var enorm.

På 2. del specialiserede jeg mig i algebraisk topologi, et hot emne i international matematik men nyt i Danmark. Efter kandidateksamen tog jeg til Aarhus for at studere topologi hos Leif Kristensen. Han havde selv studeret topologi hos MacLane på University of Chicago, og var Danmarks eneste specialist inden for algebraisk topologi. En københavner forlader jo kun nødtigt sin hjemby, og det var kun meningen, at jeg skulle tilbringe et år i Aarhus, men det gode sociale samvær i Aarhus, og det meget levende videnskabelige miljø gjorde, at det blev til 40 år vekslende med flere lange ophold i USA.

SG Det er rigtigt, som Martin siger, at der i dag er standardkurser i starten, som alle skal tage, fx lineær algebra. Men som det foregår nu i København - og de fleste andre steder, mener jeg - så er der nogen valgfrihed i forskellige fagprojekter. Og i Bachelorprojektet begynder man at vælge efter, hvad man har fundet interessant, og hvilke personer, man ønsker at arbejde med. Vil man fortsætte studiet af matematik, skal man skrive et speciale som en del af en kandidatgrad, og evt. starte på en ph.d.-uddannelse; og i den del af studiet specialiserer man sig virkelig.

EF Ja, det indledende matematikstudium er meget ens over hele verden. Jeg studerede jo i Barcelona, og de første år oplevede jeg matematik som todelt: Der var analyse, sandsynlighed og statistik, hvor man skulle have en ide, nu gør jeg dét, men hvorfor? Det ved man bare, at det skal man. Så var der andre fag som algebra og geometri, hvor det handler mere om *struktur*, om at opdage hvorledes objekter har fælles strukturer. I de verdener kan man bevise noget om alle *de enkelte objekters* egenskaber, ved at vise det for *en hel klasse af objekter* på en gang. Det faldt i *min* smag. For mig personligt var det virkelig sjovt at læse geometri og topologi. Lige fra starten brugte jeg ti gange mere tid på algebra og geometri, end på analyse. Analyse var bare noget der skulle bestås. Geometri og algebra var helt klart mine valg.

TC Da jeg startede på matematisk institut i København, var det helt store emne *operatoralgebra / C*-algebra*; det var derfor naturligt at begynde med det. Jeg kom til USA tidligt, inden jeg havde taget en afsluttende eksamen i Danmark, og tanken var egentlig at jeg skulle fortsætte med dette emne. Men på University of Philadelphia, hvor jeg kom til, var geometri et dominerende fag: Over

halvdelen af professorerne var i geometri, det var et meget aktivt område. Derfor blev det naturligt for mig at skifte til det. Som udgangspunkt kunne jeg faktisk godt lide det hele, så derfor var springet fra noget jeg rigtig godt kunne lide - operatoralgebra – til geometri som var meget mere repræsenteret på mange universiteter i USA, naturligt for mig. Det virkede som om der var mere fremtid i det. Og det fik også en blivende interesse for mig.

Vejen til at blive forsker i matematik

MR *Søren, jeg vil godt følge op på det du sagde om at specialisere sig. Du har jo været i forskeruddannelse hos Ib, en form for mesterlære. Kan du fortælle om, hvordan det hele begyndte, hvordan bar I jer ad, og hvad har det ført med sig for jer begge to?*

SG Mit første møde med topologi var ikke med Ib. Jeg tog et første kursus hos Leif Kristensen, som Ib fortalte om. Mit andet kursus i topologi på højt niveau var med Ib, og det var så mit første møde med ham. Det var på mit 4. studieår, og det var i den periode, man skulle søge om et ph.d. Ib siger ganske vist, det var ham der valgte mig, og det har han sikkert ret i. Under alle omstændigheder skrev jeg i løbet af det 4. år i samarbejde med Ib en ansøgning til ph.d.-skolen. I den periode diskuterede vi mulige projekter. Det førte alt sammen til, at jeg blev optaget. Jeg begyndte i 2000 med Ib som vejleder, i et 4 årigt projekt, og jeg tog så min ph.d. i 2004.

MR *Og dette samarbejde har været det rygstød, som har ført dig videre i din karriere?*

SG Ja, helt sikkert. Efter at have fået min ph.d. søgte jeg en postdoc, der er en midlertidig stilling. Jeg søgte nogle stillinger i USA, fik to tilbud, og valgte det ene som var på Stanford, en stilling på 3 år. I starten arbejdede jeg videre med det, som havde været emnet for mit ph.d.-projekt, og som stadig fylder en stor del af mine arbejdsområder. Det normale er at man får sin postdoc et sted, og derefter skal man videre til et andet sted. Men de endte så med at beholde mig.

MR *Vil du tilføje noget om vejlederrollen, Ib?*

IM Det foregår normalt sådan som Søren fortalte, at man følger nogle kurser, man har hørt nogle af lærerne holde forelæsninger, og så går man hen og spørger en lærer: Vil du være min vejleder? Og her er det altså rigtig vigtigt, hvilken vejleder, man vælger. Det er det af flere grunde. Hvad er vejlederens rolle? For det første at finde et projekt, som studenten har en chance for at udføre. Men det projekt skal også være af en sådan natur, at det internationale matematikersamfund vil være interesseret i løsningen af de problemer, der bliver stillet. For det er den ph.d.-afhandling, den thesis, der afslutter ph.d. studiet, som skal gøre det muligt at få en forskerstilling, en postdoc på et andet universitet, fx på et universitet i USA, som Søren beskrev. Og hvordan vælger et amerikansk universitet de studenter, som de vil ansætte som postdoc? Det gør de i stor udstrækning på grundlag af det anbefalingsbrev, som vejlederen skriver. Derfor er det vigtigt, at den vejleder, man har, er godt placeret i det internationale forskningsamfund. Så lad mig gentage – det er vigtigt hvilken vejleder, man vælger.

MR *Hvordan kom I andre i gang med forskerkarrieren?*

TC Da jeg studerede var der en russisk matematiker – han lever stadig – som var meget oppe i tiden, og jeg læste mange af hans arbejder. Det var ikke meget relateret til hvad de andre, hvad professorerne lavede i Philadelphia. På den måde var der en naturlig overgang for mig til at finde mine egne spørgsmål, som jeg interesserede mig for; fordi jeg beskæftigede mig med noget lidt andet end de andre gjorde. På en vis måde var jeg altså min egen vejleder.

EF Da jeg afsluttede bacheloruddannelsen, der i Barcelona var normeret til 4 år, syntes jeg ikke jeg var færdig med universitetslivet. Så jeg blev ph.d.-studerende, til dels for at kunne blive på universitetet. Jeg gik i gang med noget abstrakt matematik inden for geometri, og jeg skulle læse en masse bøger og artikler. Iblandt det var der jo noget man kunne se, der ikke var løst, og så kunne man selv prøve at gøre det. Senere faldt motivationen lidt – en matematik for min egen skyld, noget der er sjovt for mig – jeg manglede at lave noget, der var mere brugbart, her og nu og ikke om måske 30 år. Så skiftede jeg til anvendt matematik, matematik anvendt i biologi, og det er det jeg gør nu.

Jeg tog en kandidatuddannelse i bioinformatik for at se, om der er noget her, jeg kan lave, hvor min viden kan bruges. Jeg blev 4 år i Barcelona i den fase, indtil jeg fik et forskerstipendium, så jeg kunne rejse i 6 måneder. Så googlede jeg rundt: Hvor er der folk, der arbejder med sjove og interessante måder at bruge matematik på i biologi? Og der fandt jeg én i Århus, som jeg kontaktede, og han svarede: Bare kom! Jeg besøgte ham, det var spændende, og så endte det med at jeg blev i Danmark. Det var altså lidt tilfældigt at jeg ender her.

IM Det normale forløb nu til dags er som det er beskrevet, at man har ca. 6 år, 2x3 år, før man får en fast stilling. I hvert fald hvis det er universiteter og matematiske institutter, der forsøger at være i fronten af forskningen, så foregår det sådan. Det er jo en ret lang uddannelse: Det varer 8 år før man har sin ph.d. og så yderligere 6 år før man får en fast stilling. Det er lidt risikabelt og det er ikke altid så behageligt for familien eller for den enkelte person.

Det var lidt anderledes før. Da jeg var færdig med at studere og fik min kandidateksamen fra Københavns universitet i 1965, var der ikke noget, der hed en forskeruddannelse, ikke noget ph.d.-system. Dengang var den eneste mulighed at få en ph.d.-grad at tage til udlandet. Det var naturligt med de kontakter, der var mellem danske matematikere og udenlandske, at det foregik i USA. Jeg kom i 1968 til Chicago. Nu var jeg på det tidspunkt lidt ældre end de fleste amerikanske studenter, så jeg fik en ph.d. efter to år – i 1970, fra University of Chicago. Jeg blev så ansat i 1 år som forsknings-postdoc, som de kaldte det. Da det år var gået, besluttede jeg mig til at tage tilbage til Danmark, da min ældste søn skulle begynde i skole. Jeg kom til Århus og var der i ca. 40 år, men jeg var i lange perioder tilbage i USA.

At undervise i matematik – og at formidle hvad matematik er

MR *Når man er ansat på et universitet, så er man både ansat som forsker og som underviser. Hvordan prøver I at gøre undervisningen som sådan interessant, både for jer selv, men også for jeres studerende?*

TC Jeg synes, der er mange også elementære ting, der kan være en fornøjelse at undervise i. Selvfølgelig er det sjovt at prøve at forklare andre noget. Men ud over det kan man se på ting, man kender vældig vældig godt med nye øjne og det kan blive rigtig sjovt og tilfredsstillende. Med meget elementære ting som Calculus, kan det måske være svært. Men det behøver ikke være så kompliceret, før der er noget interessant i det. Og jo mere man ved, jo flere paralleller kan man trække til mere avancerede og mere komplicerede forhold – som man måske kun ser som specialtilfælde i undervisningen. Det kan være vældig interessant, at prøve at forklare det på en enkelt måde til de studerende. Den slags paralleller synes de studerende faktisk er interessant – naturligvis især de gode studerende! Og man kan jo sagtens forklare rigtig meget på en forståelig måde, uden at gå ind på det tekniske.

SG Ja, i mange tilfælde, så synes jeg faktisk materialet selv er meget interessant, og i enhver undervisning så drejer det sig vel om at kommunikere, hvorfor dette materiale er interessant. Det er især nemt, hvis det drejer sig om noget, som er meget tæt på ens eget felt. Men der er jo en god grund til, at vi underviser i et givet emne, og i mange tilfælde skal man bare kommunikere, hvorfor det er vigtigt, at de lærer netop dette.

EF Jeg er helt enig i det Tobias siger. Men jeg vil godt tilføje noget om dette at undervise på store hold. Jeg underviser mest i matematik for biologer. Det er kæmpestore kurser, omkring 200 studerende, og det er ikke alle der er glade for matematik. Indholdet i kurset betyder mest, men der er så meget pædagogik, man skal tage i betragtning i sin planlægning i tilrettelæggelsen af en forelæsning, der varer 2 timer: De her 10 minutter, hvor jeg skal forklare det, hvordan skal jeg gøre det, hvordan skal det bygge op til det næste... der er rigtig meget. De skal jo lære noget, man skal hele tiden motivere, det man gør; motivere de studerende og forklare, hvorfor de skal lære det her, hvorfor de skal lære matematik, når de gerne vil være biologer. Så det er virkelig et stort arbejde. Kurset er i udvikling hele tiden, så hvert år skal der ændres noget. Jeg kan meget godt lide at undervise 1. års studerende – men det er anstrengende, man bliver træt, Det kræver meget psykisk energi at undervise sådanne kurser. Man får også selv kurser i, hvordan man skal undervise – jeg har lige selv taget et sådant kursus. Det pædagogiske kan betyde virkelig meget!

Undervisning på mindre kurser er generelt nemmere, for her opdager man lettere, hvad der går galt og hvad der går godt. Og man kan ændre forløbene løbende. Den slags undervisning er meget mere afslappende, synes jeg. Og meget interessant.

IM Ja, det kan godt være svært, hvis det er meget store hold. På de indledende kurser er det som omtalt flere hundrede mennesker, vi underviser på én gang! Man kan anvende forskellige teknikker. Der er nogle der bruger et system, hvor man stiller et spørgsmål, hvor der er et vist antal svarmuligheder, og så kan man svare med farvede kort, på en computer eller et andet system. På den måde kan man få et umiddelbart indtryk af, hvor mange der har forstået, hvad det egentlig er, man snakker om. Og at aktivere studenterne. Men det er selvsagt vanskeligt at aktivere så mange mennesker på én gang.

En af måderne, jeg selv ofte anvender, er at trække udviklingslinjerne op: Hvad kom forud for det, man nu prøver at lære studenterne? At trække det historiske perspektiv op.

MR *Ja, det er jo rigtigt, at matematik har en lang og rig historie. Men når man tænker på, at Euklids lærebøger, der blev skrevet for 2300 år siden, har været i brug i alt fald indtil for 100 år siden, er det vel i grunden ikke så mærkeligt, at mange tror, at alt, hvad der er interessant inden for matematik, det har været undersøgt, det har man fundet ud af. Kan matematik gøres interessant og endda aktuelt ud fra et historisk perspektiv?*

IM Det er heller ikke så let. Men jeg kan måske svare ved at give et eksempel på, hvordan jeg brugte det i forelæsninger. For næsten præcis 200 år siden fik den berømte matematiker, CF Gauss en opgave fra kongen af Hannover – et fyrstedømme lige syd for den daværende danske grænse, syd for Holsten. Det har en udstrækning ca. fra Göttingen, hvor Gauss levede, og helt til Holland. Gauss fik den opgave at lave en geodætisk opmåling af fyrstedømmet. Det kræver for det første rigtig mange målinger, men det kræver også rigtig mange udregninger, og man havde jo ikke maskiner dengang. Det var altså udregninger, der foregik i hånden. Det tog Gauss ca. 10 år. Midt i den periode, omkring 1825, udgav han en af sine mest berømte afhandlinger. Den handlede om flader – tænk på en fodbold eller en badering.

Vi har alle sammen en fornemmelse af, at disse flader, de krummer. En håndbold, der er mindre end en fodbold, den krummer mere end en fodbold. Det har alle mennesker en forståelse af. Men Gauss formulerede krumning som matematisk koncept, han fik defineret hvad krumning er i matematisk forstand. Og så viste sig dette højst mærkværdige fænomen, at man kan afgøre om flade krummer *ved at måle vinkelsummen i små trekanter*. Gauss siger: Vi har et punkt på denne flade, og vi vil gerne se, hvordan krummer fladen i en omegn af punktet. Lav nogle små trekanter på fladen omkring punktet. Mål vinkelsummen i de trekanter. Vi ved alle sammen fra Euklid, at hvis det er en flad trekant, så er vinkelsummen 180 grader, eller som vi foretrækker i matematik – vinkelsummen er lig med π (pi), halvdelen af omkredsen af en cirkel med radius 1. Tag nu vinkelsummen i den lille trekant vi har målt på, træk vinkelsummen i en flad trekant, dvs. π fra, og divider med arealet. Lad nu trekanten blive mindre og mindre, så får vi en grænseværdi, og det tal er præcis krumningen i det punkt, vi er interesseret i. Og det er jo en fantastisk opdagelse, fordi når vi tænker på ting, der krummer, så ser vi det udefra, fra det omgivende rum. Med andre ord, en intelligent lille myre, der piler rundt på fladen, og som kan måle vinkler, kan finde ud af, uden at se fladen udefra, at den krummer og hvor meget!. Det er en af de allervigtigste opdagelser i matematik overhovedet.

Og det har at gøre med topologi, som jeg skal forklare nu. Gauss havde en fantastisk forskningsstudent, Bernhard Riemann. Gauss havde selv kun undersøgt flader – det var det, der hørte til landmålingen. Men Riemann generaliserer dette til højere dimensioner. Han definerer hvad mange-dimensionelle flader er – vi kalder det for mangfoldigheder, ofte Riemannske mangfoldigheder. Og de har også en krumning, som består af mange tal – vi kalder det for en krumningstensor. Ud af

den krumningstensor kan vi trække en ny række af tal, som vi kalder karakteristiske klasser. Og karakteristiske klasser, det er faktisk noget, som Søren og jeg har undersøgt i mange forskellige situationer. Her ser vi altså en 200-årig udvikling fra Gauss' oprindelige afhandling til det, vi faktisk beskæftiger os med.

MR *Og så er der oven i købet tråde til fysik, til Einsteins relativitetsteori!*

IM Ja, det er jo det højst mærkværdige, at "naturens love er skrevet i matematik". Det er på ingen måde indlysende, at det skulle være sådan. Det er rigtigt – de Riemannske mangfoldigheder var grundlaget for Einsteins relativitetsteori. Og her kan vi da også endelig nævne den anvendelse af matematik, at man bruger relativitetsteorien i GPS-systemet. Man kan således godt sige, at det startede med en anvendelse, et geometrisk problem, nemlig at lave en opmåling af et landskab, og det ender 200 år efter med et GPS-system, som også har med opmåling at gøre.

MR *Matematikken udvikler altså hele tiden hele tiden nye områder? Kan I andre supplere med andre eksempler?*

SG Jeg kan nok ikke sige noget, der er rimeligt forståeligt for en gymnasieelev, om det jeg sidder og tænker over lige nu. Men lad mig sige lidt om det jeg vil kalde mit gennembrud: Det havde med grafer at gøre, altså emner inden for *graft teori*, der er et område, der har udviklet sig meget de seneste 50 år. En graf består af endeligt mange punkter, forbundet med endeligt mange linjer, og de adskiller sig ved kombinatorikken i, hvilke linjer der starter og slutter i hvilke punkter. Man kan betragte sådanne grafer som et rum – mit fag er topologi, det generelt drejer sig om studiet af rum – og man kan altså betragte en graf som et rum. Men man kan også betragte grafer som punkter i et meget abstrakt rum. Og mit, synes jeg selv, bedste resultat indtil videre handler om egenskaber ved modulirummet af grafer. Det var noget, jeg fandt ud af i løbet af mit første år efter min ph.d.

IM Og jeg har undersøgt systemet af, eller rummet af alle mulige flader, fx alle mulige todimensionelle flader. Det hedder modulirummet, eller Riemanns modulirum. Det har jeg undersøgt, på samme måde som Søren har undersøgt det i 1 dimension lavere, nemlig for grafer. Og der er faktisk forbindelser mellem de to områder.

TC Der er jo mange af de "nye" områder, der på en eller anden måde har eksisteret længe, og som måske havde en meget lille udvikling tidligere, men som i den nyere tid har været i en rivende udvikling. Det kan også være et relativt nyt fænomen, fx inden for sociologi, som ikke umiddelbart er i matematikken, men hvor der ofte er noget matematik, som allerede eksisterer, som viser sig at være relateret til det.

EF Jeg synes også det skal nævnes, at der de sidste 50 år er der sket rigtig meget i forbindelse med computerne. Vi anvender dem til både numeriske og symbolske udregninger. Det er et stort felt. Computerne har ændret meget. I løbet af de sidste 20 år er der sket rigtig meget inden for biologi, og der har man haft brug for at udvikle både nye teknikker med anvendelse af computere, og faktisk også ny matematik med nye teoremer osv. til at svare på disse spørgsmål.

At forske i matematik

MR *Denne lille diskussion og jeres fortællinger om udvikling af ny matematik fører naturligt over i det næste jeg vil tale med jer om, nemlig matematisk forskning, og om selve forskningsprocessen. Hvordan kommer man i gang med et matematisk projekt, hvordan vælger man, hvad man vil beskæftige sig med? Og er der så en bestemt vej, man følger, og som i sidste ende fører til resultater? Hvordan foregår det egentlig?*

EF Jeg synes det var lidt hårdt i starten. Man var vant til at der var en lærebog, man skulle lære nogle emner, og det gik meget godt. Men så pludselig skal man selv finde ud af nogle emner, nogle åbne spørgsmål, hvordan jeg løser dem? Jeg gik lidt blank i starten, jeg vidste ikke rigtig, hvad jeg skulle gøre, med tiden kom det jo, men det tog nogle år at komme i gang, at finde ud af, hvordan man gør det. Nu synes jeg det er meget spændende, men det var hårdt i starten.

Ja, hvordan foregår det? Det er ofte sådan at man tænker videre over et spørgsmål som man allerede har besvaret. Det fører til nye spørgsmål, som åbner en vej frem. Andre gange vil man gerne forstå noget, hvor der ikke er et let svar på hvilken vej man skal følge. Det er en situation jeg ofte er i, i den anvendte matematik – jeg tester rigtig mange ting, og prøver så at bruge intuition eller "gætter på" hvordan strukturen er, hvorfor tingene opfører sig som de gør. Når man så har et gæt skal man bevise det. Det er ikke nok at sige, jeg har set på det, jeg tror på at det er det her der gælder. Og her sker det ofte, at i arbejdet med at bevise det, går man i stå og tænker: Måske er min antagelse forkert, og man begynder måske at lede efter et modeksempel. Det kan man måske heller ikke finde, men i det arbejde får man måske nye ideer til at bevise formodningen. Det kører ofte frem og tilbage mellem forsøg på at finde et bevis og forsøg på at finde et modeksempel. Det kan ofte tage lang tid. Og måske bliver jeg træt af det og lægger projektet væk. Og 4 måneder senere, så tager jeg det op igen og starter forfra – og nogle gange lykkes det ikke. Men de fleste gange, hvis man insisterer og er stædig nok, så finder man en løsning. Og så bliver man meget glad!

TC Eller også finder man undervejs nogle andre interessante ting! Det er vel ideen med grundforskning, man kommer med et eller andet spørgsmål, men man ender nogle gange med at få et interessant svar på noget helt andet. Simpelthen fordi man i arbejdet med det oprindelige spørgsmål har fået meget mere forståelse for sagen. Eller man har et eller andet, man gerne vil have styr på, men man ved ikke, hvad det rigtige spørgsmål er.

Man har jo en række projekter, med ting man gerne vil vise, nogle har man i lang tid arbejdet på at finde beviser for, andre tror man faktisk, man kan se hvordan man skruer et bevis sammen, men hvor der kan være alle mulige tekniske problemer med at få det gjort klar. Og så bruger man faktisk også en del af sin tid på at finde ud af, hvad man vil lave, hvis man vil lave noget helt andet, end det man beskæftiger sig med for øjeblikket. Man kan jo ikke skifte til et helt andet område i matematik fra et øjeblik til det næste. Man er nødt til at arbejde på så at sige et "halvt skifte", mens man er i gang med et bestemt område og i virkeligheden har meget arbejde endnu i dette område. Så jeg vil beskrive arbejdslivet som matematisk forsker som tredelt:

- man arbejder med nogle projekter, som man har haft fat i før, og hvor det endnu ikke er lykkedes

at finde beviserne;

- man arbejder med nogle gode ideer, man har i nogle projekter, men som ikke er blevet færdige endnu, fordi der er et eller andet teknisk, der skal klares;
- og så bruger man tid på at finde ud af, hvad man vil lave, hvis man vil lave noget helt andet.

EF Ja, man har alle de projekter, der kan ligge i årevis, hvor man ikke når at gøre dem færdig, også fordi man skifter mellem projekter hele tiden. Jeg ønsker virkelig, jeg havde mere tid til at kigge på nye ting – det er noget, jeg ofte mangler. Man skal jo også undervise, og det fylder rigtig meget. Og man skal skrive ansøgninger om penge, om fondsmidler, det fylder også en del. Og selvfølgelig skal man også deltage i instituttets liv. Ofte er der ikke så meget tid til forskning, som man kunne ønske.

IM Det er i hvert fald hårdt arbejde! Jeg husker, da en af mine andre forskningsstudenter, Lars Hesselholdt, 10 år ældre end Søren, kom ind til mig, efter at have fået sit ph.d.-stipendium, og spurgte mig: Hvordan gør man? Jeg svarede dengang: Du tager et stykke papir, og så sætter du dig til at tænke! Problemet er jo, at det er vældig svært at forklare, hvordan forskning foregår. Når man starter på sit ph.d.-studium, så er det vejlederen, der definerer et projekt for én. Og så hjælper man selvfølgelig også til. Man finder noget af den litteratur, der skal til, for at få læst sig ind på og rundt omkring det projekt, man har, og så hjælper man typisk ved at man snakker med sin forskningsstudent en time eller to om ugen. Og her er det vigtigt, at man også støtter sin student psykisk, fordi det er så hårdt, der kan gå måneder, nogle gange hele år, før man for alvor får lavet fremskridt i det problem, det drejer sig om. Der er mange, der tror, at forskning det er sådan en slags leg – men det er det ikke! Det er hårdt arbejde, det kan være hårdt psykisk – og det er også hårdt for omgivelserne, fx for ens børn eller ægtefælle. Jeg ved ikke rigtig, hvordan man skal forklare processen – processen at tænke er jo noget underlig noget! Det, der karakteriserer forskning frem for almindelig tænkning, det er, at man skal koncentrere sig om det samme i et meget, meget langt tidsrum, uden at man er sikker på, at der vil gå et lys op for én. Det gør det psykisk hårdt!

MR *Louis Nirenberg, amerikansk specialist i partielle differentiaalligninger og en af modtagerne af Abelprisen, sagde det på den måde, at god forskning kræver rigtig meget "Sitzfleisch"!*

IM Ja, jeg kan godt blive lidt irriteret over at nogle professionelle forskere i den offentlige debat prætenderer, at det hele er en leg. Det er det ikke!

MR *Men en gang imellem har man så en oplevelse af succes!*

IM Det er selvfølgelig det, der driver værket! I sidste ende er vi ikke specielt drevet af interesse i samfundsforhold, eller i at gøre det gode for menneskeheden osv. Det er noget andet. Og selv om det kun sker ganske sjældent, så er det en kæmpe glæde at finde ud af noget, som ingen anden har fundet ud af tidligere. Det er det, der driver værket!

Der er nogle matematiske problemstillinger, som er stillet af andre og ofte meget berømte matematikere, lang tid før ens tid. Og de er ikke blevet løst af dem, men de har peget på det problem. Og det er en særlig glæde og særlig interessant, hvis man arbejder med et af de problemer, der normalt tager frygtelig lang tid at løse – og man så finder en løsning. Det giver selvfølgelig også

prestige. Og nu til dags, hvor der er penge i al ting, så får man også ekstra honorar og præmier osv. Men glæden ved at løse et af de der mere klassiske problemer er selvfølgelig virkelig stor.

SG Du spurgte også om forskningsprocessen, og her vil jeg indskyde noget jeg selv i alt fald ikke vidste, før jeg begyndte at forske selv: Nærmest halvdelen af processen er at finde de rigtige spørgsmål! Når først man har fundet et spørgsmål, hvor man er sikker på, at det er et godt spørgsmål, så er man allerede kommet langt! Forskning er nemlig ikke, at man har et spørgsmål, som man går ud og prøver at besvare. Man skal først selv finde ud af, hvad spørgsmålet egentligt går ud på. Og man kommer til at ændre spørgsmålet nogle gange undervejs – det kan vise sig, når man arbejder med stoffet, at det ikke var det helt rigtige spørgsmål, man først stillede. Nu har jeg selv prøvet at have ph.d. studerende, og der mærker man virkelig, at en stor del af processen er at finde det rigtige spørgsmål.

MR *Hvilken rolle spiller æstetik, "the beauty of mathematics"?*

SG I matematik har vi ikke eksperimenter, som i naturvidenskabelige fag, hvor kriteriet groft sagt er, at man skal kunne forudsige virkeligheden. Vi har andre kriterier: Hvordan afgør vi om noget er interessant, om noget er sandt, om noget er bedre end andet? Og her synes jeg at æstetik er det rette ord. Man opbygger en fornemmelse for, at *det her* er mere fundamentalt end noget andet, og så følger man, eller vælger man det, der er mere fundamentalt. Det kan man godt kalde æstetik.

Samarbejde med andre forskere – og med andre fag

MR *Nogle forskere arbejder mest alene, og for andre er det at arbejde sammen ganske afgørende for at det fungerer – hvordan ser det ud i jeres tilfælde?*

IM Jeg kan bedst lide at have en medforfatter, det letter det psykiske pres, og man har så også én umiddelbart at tale med. Jeg har vel skrevet omkring 100 afhandlinger, og langt de fleste er med en eller flere medforfattere. I gamle dage foregik samarbejdet jo mest per brev. Det var faktisk udmærket - man modtog et brev, så tænkte man over det, og skrev så tilbage. Det betød, at sådan cirka hver fjortende dag eller en gang hver 3. uge, var der forbindelse – en helt anden kadence end nu. Og det kunne godt være en fordel, at det var så langsomt. Nu foregår det jo på en helt anden måde, nu skriver vi bare e-mails osv. Dengang, i 60'erne og 70'erne var der heller ikke så mange penge og ikke så mange konferencer, og flyrejser var dyre. Nu til dags er der jo et uhyre antal konferencer, hvor man mødes og diskuterer med sine kolleger og hører om det nyeste.

SG Jeg anvender ofte videokonferencer parallelt med skriveprocessen. Hvis jeg er i gang med at skrive på en artikel, og vi er inde i processen, så har vi typisk en ugentlig konference på Skype, for at tale om "hvor sidder vi fast nu", hvor langt er vi i projektet. Derudover er der jo e-mail, hvor man stiller hurtige spørgsmål til sin partner, eller potentielle samarbejdspartnere. Hvis det er tidligt i fasen, så er det ikke sikkert, det bliver til et projekt. Men så stiller man et spørgsmål til én, man tror har et svar på det, man søger – eller omvendt: man får sådanne spørgsmål.

TC Jeg har skrevet adskillige artikler alene, men de fleste har jeg skrevet i samarbejde med andre. Jeg synes, der er mange fordele ved at samarbejde med andre. Der er selvfølgelig også et socialt aspekt: Det er sjovt at dele, hvis man har lavet noget, man synes er rigtig godt. Og det er også rart nok at dele, når man synes, det går i stå: Det kan være nemmere at komme videre, måske også til noget andet, når det virkelig ikke vil lykkes. Og det kan være nemmere i et samarbejde. Når man arbejder sammen med andre, så kommer der forskellige input på et problem. Jeg synes i hvert fald, det er langt sjovere at samarbejde med andre.

EF Jeg arbejder også sammen med andre. Nogle gange er der tale om forskellige ekspertiser: Vi arbejder på forskellige dele af en artikel, vi snakker sammen, men vi laver vores individuelle arbejder og bidrager med forskellige aspekter. Andre gange er det virkelig to mennesker eller tre mennesker der sidder sammen og bygger matematikken sammen. Det er virkelig sjovt – der er en, der siger, hvad nu hvis vi tager det sådan, en anden følger op - ja, så kan vi jo gøre det, og så tager vi bagefter ... Man er virkelig helt høj, når det kører! Der er to eller tre hjerner, der arbejder sammen. Det kan jeg meget godt lide. Og resultatet bliver som regel meget bedre!

MR *Du arbejder jo primært med anvendelsesprægede spørgsmål inden for faget biologi, Elisenda. Kan du beskrive lidt nøjere, hvordan samarbejdet med biologer foregår?*

EF Jeg arbejder med matematiske modeller, der optræder i molekylær biologi. Jeg arbejder derfor med at finde matematiske teknikker, der kan bruges til at undersøge de modeller, man opstiller. Så jeg har nogle samarbejdspartnere, som kommer med en bestemt model, og siger: Vi vil gerne forstå, hvad den her model egentlig siger. Og så går jeg i gang med at lave nogle test ...

MR *De "leverer" altså modellerne til dig?*

EF Ja, de leverer modellerne, det bestemmer jeg ikke. Så kommer jeg med nogle svar, og der sker det så ofte, at de siger, de vil have en lidt mere udbygget, kompliceret model undersøgt. Vi mødes i forløbet ind imellem og snakker om modelleringen og prøver at forstå, hvad modellen siger. De kommer med nogle hypoteser, noget de kan tænke giver mening biologisk set. De har altid en meget god intuition, og så går jeg i gang med at se, om det er rigtigt eller ej. Nogle gange er det rigtigt - jeg ser på det konkret, men hvis jeg bare kigger på ligningerne, så kan jeg ikke bruge en intuition. Men fordi de ved, at ligningerne repræsenterer den og den model for et biologisk system, så giver intuitionen et begrundet gæt, der er rigtigt, og som kan give et meget overraskende resultat. Men andre gange, så tager de fejl, og jeg må sige; Nej det er ikke rigtigt, hvad I tror der sker, sådan kan det ikke forklares. Det giver mig rigtig meget at snakke om modellerne med dem. Nogle gange går jeg måske selv videre, jeg kigger nærmere på deres model og giver dem nogle ideer til at svare på de spørgsmål, de har. Måske kan jeg endda vise et teorem, der siger: Hver gang vi har en model, der opfylder det og det, så vil det have denne konsekvens. Næste gang man har en situation, hvor man ville have lavet en bestemt undersøgelse, så behøver man det ikke, for mit teorem siger, at dette gælder for alle disse situationer.

MR *Skal du også vide meget om biologiske spørgsmål? Deltager du fx i konferencer sammen med biologerne?*

EF Ja, det gør jeg. Der er forskellige konferencer, fx om systembiologi, der handler både om biologi og modeller. Her er deltagerne en blanding af matematikere, fysikere, dataloger, biologer – det er virkelig meget multidisciplinære områder. Og jeg har da lært noget biologi, men jeg har ikke arbejdet i et laboratorium fx. Der er altid noget, jeg føler jeg mangler for at kunne forstå visse data fra eksperimenter – hvordan laver de det? Når man i dag går ind i et laboratorium, er der jo kun maskiner, der blander og ryster det, der undersøges, så det er lidt svært at forstå, hvad der foregår. Man skal kende lidt biologi for at kunne indgå i et samarbejde mellem matematik og biologi, for ellers ville man se på spørgsmål, der ikke har nogen betydning for biologerne eller for nogen som helst.

Anvendt matematik – og ren

MR *Både du og Tobias arbejder steder, hvor der er stort fokus på anvendelsen af matematik. Vi har klassisk inden for matematik ofte foretaget en opdeling i såkaldt ren matematik, der først og fremmest er drevet af nysgerrighed, og anvendt matematik. Og de to parter har ikke altid set lige velvilligt på hinanden. Er det ene bedre end det andet? Eller det et dumt spørgsmål?*

TC Jeg har tilbragt min forskerkarriere på nogle af de institutioner der er mest engageret i anvendt matematik. Jeg var oprindelig på New York University, på Courant instituttet, som har halvt anvendt og halvt ren matematik, og på MIT er det en tredjedel, der arbejder med anvendt matematik. Jeg tror ikke man kan sige, at der er noget, der er bedre end andet. Det er klart at der er forskning, der er bedre end andet, men det krydser jo på tværs af ren og anvendt. Der er forskellige forventninger til, hvad det vil sige at være god i ren og i anvendt matematik. Det er noget, der kan skabe mange konflikter på et institut.

Det kan være farligt at ansætte folk, der faktisk ikke har nogen matematisk baggrund, som anvendt matematiker. Farligt forstået på den måde, at så mister man en ekspertise i matematik, hvis man ansætter nogen, der i virkeligheden ikke har nogen tung matematisk baggrund. På et matematisk institut burde den matematiske baggrund trods alt veje tungest. Men det har ikke noget at gøre med, om man er anvendt eller ikke anvendt.

EF Traditionelt er anvendte matematikere nok blevet betragtet som ikke helt så gode matematikere. Men jeg tror, det ændrer sig i disse år. Udover det findes der flere og flere dygtige matematikere i forskellige discipliner, der er uddannet som rene matematikere – topologi og algebra og geometri – og som finder ansættelse i nye anvendelsesorienterede områder.

TC På Courant-instituttet var der en del folk, hvor det var svært at sige, om de var det ene eller det andet. Der var en stærk forbindelse, det var der en lang tradition for. Der var flere førende forskere, fx Peter Lax, som er en virkelig højt respekteret matematiker, som i virkeligheden både var anvendt og ren matematiker. Han fik Abelprisen i 2005. Jeg ved godt man siger, at folk ser lidt ned på matematikere i anvendt matematik, men det mener jeg aldrig var tilfældet dér. Der var og er forskellige ideer til, hvad det vil sige at være matematiker – og her var der nogle fremtrædende

matematikere, som var i begge områder . Det var ikke kun Peter Lax – Kurt Friedrichs og Courant selv, Fritz John, Louis Nirenberg til en vis grad, Jürgen Moser og mange andre.

EF Kontakten er vigtig: Hvis man sætter anvendte matematikere og rene matematikere sammen, så kan der rejses virkelig interessante spørgsmål, virkelig dybtgående. Jeg tror at mange, der opfatter sig som rene matematikere, ville nyde nogle af de spørgsmål der arbejdes med i anvendt matematik.

Men der er forskel på måden, man arbejder inden for anvendt og inden for ren matematik. I ren matematik er man stærk i et område, man bygger op, og hvor man prøver at udvikle teorier. I anvendt matematik er der et spørgsmål, som man skal løse. Man kan ikke ændre spørgsmålet. Her er man nødt til at kigge på andres teorier, du ikke kendte i forvejen. Var jeg et andet sted, ville jeg måske have gået uden om, syntes de var kedelige, men nu er jeg nødt til det. I anvendt matematik arbejder du ofte med flere forskellige discipliner samtidig og vælger ikke altid kun det, du er mest interesseret i.

MR *Når I møder andre fag, både fag i nabolaget som biologi, og fag der er længere væk som økonomi, jura og social sciences, gør I jer så også tanker om, hvordan faget matematik adskiller sig fra andre fag.*

EF Når du går gennem studiet af matematik, så ændres måden du tænker på, og det er ikke kun, når du arbejder – det er i hele dit liv. Man anskuer ting på en lidt anden måde, man tænker mere logisk. At være matematiker er for mig ikke det, man læser eller det, man gør, det er en måde at være på. Jeg ved ikke, om det er sådan med andre fag, men jeg tror det er nemmere at skifte mellem andre fag, fra fx fysik til biologi eller kemi, end at skulle skifte til matematik – man tænker på en helt anden måde her.

TC Matematik er jo et fag, hvor man virkelig fordyber sig, hvor man ikke er tilfreds med et halvt svar, hvor man ikke er tilfreds med et 'rimeligt' argument. En af attraktionerne ved matematik er, at man kan nå frem til at *vide*, om det er rigtig eller forkert – med sikkerhed. Nogle af de nævnte fag er da tættere på end andre. Jura er nok længere væk.

Men der er mange eksempler på at matematisk tankegang optræder i vidt forskellige områder, i statistical physics, i social sciences, i alle mulige områder på tværs af fag, som alle faktisk har en underliggende matematisk struktur eller en underliggende matematisk essens. Og inden for ingeniørfagene sker der alt muligt nyt, fluid-dynamics spiller en kæmperolle inden for alle ingeniørfagene på MIT, og det er et område, som er meget lidt forstået matematisk, og som selvfølgelig har brug for matematik.

Et universelt fag

MR *Matematik er et meget universelt fag, hvis bare vi ser på vores egne liv: Jeg personlig er opvokset og uddannet i Tyskland og har arbejdet i Danmark i 35 år. Elisenda er fra Catalonien og har foretaget det samme spring. Tobias tog fra Københavns Universitet til USA og har opholdt sig der i*

mange år, men kommer tilbage til Danmark næsten hver sommer i nogle måneder. Ib tog efter sin kandidatgrad fra København sin phd på University of Chicago og har sidenhen tit tilbragt lange perioder der og på Stanford University. Og Søren har arbejdet på Stanford i 14 år inden han vendte tilbage til Danmark.

Livet som matematiker kan nogle gange være hårdt, men det er jo også forbundet med goder: Matematikere rejser en del, de tager til konferencer, de besøger fagkolleger fra deres netværk og de får besøg fra kolleger på samme måde. Matematik er et meget internationalt fag, og dertil hører også, at man kan og skal bevæge sig.

EF Ja, jeg kom til Danmark på et stipendium på 6 måneder, det har betydet rigtig meget, jeg endte med at blive her. Jeg har fået en datter her, fået min karriere her, så hele mit liv har ændret sig. Og generelt får man rigtig meget ud af at rejse ud og møde de andre, der arbejder med lignende problemstillinger. På instituttet er der faktisk ret få, man kan snakke med om de emner, man arbejder med. Der er så mange forskellige discipliner inden for matematikken, så det er egentlig et tilfælde, at vi er to, der arbejder med beslægtede emner. Hvis man gerne vil lære nye ting, lære samarbejde med andre, lære andre at kende, så skal man rejse, besøge de andre, nogle dage eller uger. Eller deltage i konferencer. Eller bruge Skype – det er blevet standard, at vi bruger Skype.

TC Man opbygger også netværk. I begyndelsen af forskerkarrieren er man måske mere afhængig af det, men man gør det hele livet. Man gør det også for at formidle sin egen forskning til andre. Hvis man har fat i et eller andet, så har man jo kontakt med dem, og det kan være man bare skyper dem, eller ringer til dem. Eller man tager direkte på besøg hos dem, som Elisenda og Martin gjorde det. Det er et plus ved vores arbejde, at vi kan rejse og fx bo 6 måneder et andet sted i verden. Man arbejder selvfølgelig, men der er også mere i det.

SG Det er en meget international verden vi bevæger os i. Men det er også samtidig en meget lille verden, med ret få forskere i hele verden, der beskæftiger sig med samme felt som du gør. Og det gør det nødvendigt, at det er et internationalt fag. Mine samarbejdspartnere er især i USA og i England. Jeg ser dem til videokonferencer, til almindelige konferencer, eller vi besøger hinanden.

IM Matematik er et vidunderligt internationalt fag. Og vi behøver jo ikke slæbe rundt på apparatur, en blyant eller en computer er rigeligt. Det er en stor fordel.

Er matematik stadigvæk ét fag?

MR I dag er matematik blevet et fag med, man kan næsten sige, ufatteligt mange specialiseringer. Og mange vil slet ikke have hørt om en hel del af disse. Algebraisk topologi er ikke noget enhver ved, hvad handler om, og jeg kan i flæng nævne områder som – sædvanlige og partielle differentiale ligninger, harmonisk analyse, algebraisk og aritmetisk geometri, kategoriteori, sandsynlighedsteori, statistik, stokastiske processer, you name it. Er der så stadig tale om ét fag? Og hvordan ytrer det sig, når det faktisk er sådan, at ingen enkeltperson kan overskue det hele?

TC Der er nogle fælles træk – den logiske tankegang, at man har noget, man har bevist, som man ved er rigtig (og ved hvad der er forkert). Det er også sådan, at i næsten alle områder er der noget af den samme matematik, der indgår, måske på et relativt lavt niveau, men det er ikke fuldstændig forskelligt.

EF Den strukturerede måde at tænke på, den findes i alle matematiske discipliner.

IM Hvert fjerde år afholdes der internationale matematikkongresser, den sidste i 2018 i Rio i Brasilien. Disse kongresser er struktureret sådan, at de er opdelt i 20-25 forskellige sektioner med hver sine discipliner – fx dem du nævner. Der er ingen, tror jeg roligt man kan sige nu til dags, der kan overskue dette felt, og som har bare en rimelig fornemmelse af de samlede 25 forskellige sektorer. Algebraisk topologi er bare én af de 25 sektioner – så det er vidtforgrenet. Jeg tror man kan sige, at Hilbert var den sidste matematiker, der havde et rimeligt overblik over den samlede matematiske udvikling. Men det er jo også over 100 år siden.

Nu nævnte du selv nogle forskellige områder af matematikken. Hvad er det for områder, der ligger tæt ved algebraisk topologi? Det er *kategoriteori*, det er dele af *talteori*, det er *algebraisk geometri* og *aritmetisk geometri*, det er teorien for *differentialligninger* og *differentialgeometri*. Så det er 4-5 af de sektioner, jeg omtalte, at de internationale kongresser er opdelt i, hvor der er overlap og tæt kontakt. Kongresserne er godt nok opdelt, men det er jo *matematik*-kongresser, der blot er opdelt i 25 hoved-sektioner af faget. Vi har alle sammen et hovedområde, og så ved vi en del om de områder, som ligger tæt ved.

SG Jo længere tid jeg har været i matematik, jo flere grene har jeg selvfølgelig fået indblik i. Jeg har haft mere tid til det, min egen forskning er ligeledes bredt lidt ud. Man kan godt sige, at det startede ret snævert, med en fordybelse nede i nogle små felter. Men de områder, du nævner rummer mange eksempler på forskning, der sammenkæder forskellige grene af matematik ...

MR *Og nogle gange sker der en slags "krydsbefrugtning" mellem ret så forskellige områder...*

SG Det er i en vis forstand nogle af de virkelig interessante nyudviklinger, hvor man opdager en sammenhæng mellem områder og synspunkter, man først har tænkt på som forskellige. Og så viser det sig, der er en dybere sammenhæng mellem de to.

MR *Selv om man arbejder i forskellige områder, så er der vel et vist metode-fællesskab, at man angriber problemer på en måde, der minder om hinanden...*

IM Ja, jeg kan give et eksempel – i forlængelse af det jeg nævnte tidligere om krumningsbegrebet. Vi har en flade, hvor der er lagt et krumningsmål på, så vi i alle punkter har et sådant. Lægger vi så alle disse tal sammen - dvs. integrerer vi krumningsfunktionen hen over fladen – så får man et meget mærkeligt resultat, man får nemlig 2π gange et helt tal. Det hele tal, det er 2, hvis det er en kugleflade, hvis det er en torus (badering) så er det 0, hvis det er figur som en kringle med to huller i, så er det -2 osv. Dette resultat kalder vi *indeks-sætningen*, ja I dag kalder vi det *den første index-sætning*, for det er blevet stadig videreudviklet. I arbejdet med denne videreudvikling bruges teorien for partielle differentialligninger! Det er et eksempel på et område, der oprindeligt startede et helt andet sted, men hvor man pludselig skal lære sig en helt ny disciplin. Jeg husker det

selv tydeligt: Da jeg første gang kom i forbindelse med Atiyah-Singers index-sætning, så skulle jeg lære mig en hel del om partielle differentiaalligninger.

MR *Og Poincare-formodningen, som i formuleringen lyder topologisk, er i sidste ende også blevet løst med metoder fra partielle differentiaalligninger, af den russiske matematiker Perelman.*

IM Ja, matematik er ofte meget mærkelig. Nu nævnte jeg at, når man integrerer Gauss-krumningen, så får man 2π gange et helt tal: Det hele tal er $(2 - 2g)$, hvor g er antallet af huller i den flade vi ser på. En badering har ét hul, en kringle to osv. Så det er uafhængigt af hvordan vi deformerer, rykker og slider i den her badering. Det er altså et tal, der er uafhængig af den præcise geometriske figur – og det er dét, der er det topologiske! Det er meget interessant, her og andet steds, at man har et problem i en kontinuert verden, men det har en skygge i noget diskret, som fx i de hele tal, eller i grafer osv.

Matematik – i andres øre

MR *Lad os snakke lidt om formidling af matematisk forskning. Jeg tager udgangspunkt i følgende: Når man er sammen med mennesker, som man ikke har mødt på forhånd, fx til en festlighed og fortæller dem, man er matematiker, så er der nogle, der reagerer næsten skrækslagen. Og der er faktisk også kun et lille fåtal af ens fagfæller, der for alvor forstår, hvad det er, man beskæftiger sig med. Kan matematik dermed ikke også blive et ensomt fag?*

SG Sidder man i festligt lag, så er det i hvert fald en forudsætning, at dem man sidder sammen med, at de er villige til at bruge mindst 5 minutter. Nogle gange vil de jo hellere fortælle om deres egne matematikoplevelser eller -uddannelse, som de ikke brød sig om. Men hvis de er interesseret, så synes jeg godt, man på 5-10 minutter kan give en eller anden ide om, hvad man arbejder med, og hvorfor man tænker over det, hvorfor matematik findes som et fag. Men det er rigtig nok, at det er ensomt i den forstand, at man ikke sådan lige kan tegne en tegning og sige, at det drejer sig om den her partikel, der støder i den der.

EF Der kommer altid en reaktion, når man til en, man lige møder, siger man er matematiker. Men nu hvor jeg arbejder mere med anvendelsen af matematik, synes jeg, det er nemmere at forklare, hvad jeg laver. Men jeg siger ikke – jeg er matematiker – jeg siger bare, at jeg kigger på modeller inden for biologi, og det kan de fleste mennesker forstå. Tidligere, da jeg arbejdede med ren matematik, så sagde jeg ikke noget, det var meget abstrakt,

TC Ja, det er et spørgsmål, man ofte møder. Hvis man taler med en ingeniør, en fysiker eller en økonom eller datalog, så har de selvfølgelig mere kendskab til moderne matematik. Men hvis du taler med folk, der ikke har et sådant kendskab, så er det et spørgsmål, der ofte kommer. Lad mig fortælle en lille anekdote: Jeg var til et selskab i New York, hvor jeg var sammen med en amerikansk matematiker og hans østrigske kone. Jeg blev præsenteret for værtinden, som alle troede var af dansk afstamning, men det viste sig nu, at hun stammede fra de hollandsk vestindiske øer. I alt fald, efter at have snakket med hende, så spurgte hun mig, hvad jeg lavede, og jeg svarede, jeg er matematiker. Så vendte hun sig om til ham, der stod bag mig, og det var min amerikanske ven.

Han havde fået fært af, at det var ikke så smart at sige, man er matematiker. Så han svarede, at han var arkitekt. Og så reagerede værtinden – ”nej hvor interessant” – og så drejede konversationen sig om hans ikke eksisterende arkitektur.

Nogle gange skal man måske ikke reklamere for meget for matematik. Men hvis man har andre interesser, synes jeg ikke, det er det helt store problem. Så prøver jeg ofte at forklare nogle af de ting, jeg er interesseret i. Og det er jo sådan, at så at sige alt har en matematisk vinkel, eller kan reduceres til nogle matematiske spørgsmål. Så på den måde er det ubegrænset. Der er så mange interessante spørgsmål, man kan kaste sig over – hvis man har tid til det. Jeg kan fortælle lidt om et specielt projekt jeg beskæftiger mig med. For eksempel om meningsudveksling mellem folk: Hvad sker der, hvis du har en gruppe, hvordan udvikler de forskellige meninger sig over tid? Opnår de enighed, og hvis de gør det, hvor lang tid tager det? Den slags ting kan næsten alle forstå – en tilsvarende problemstilling møder man inden for statistisk fysik, inden for økonomi, inden for alle mulige social sciences, inden for alt muligt. De fleste af dem, der har beskæftiget sig med emnet kommer ikke med en matematisk baggrund. Dem, vi samarbejder med, er dataloger, de kender meget matematik – det er nogle matematisk orienterede dataloger – men de kender selvfølgelig ikke matematik på samme niveau, som vi gør. Det er helt klart et matematisk problem, det er klart relateret til eksisterende matematik, i det her tilfælde til varmeligningen. Men det er ikke varmeligningen. Det er heller ikke en ikke-lineær version af varmeligningen, jeg kender. Men ens matematiske baggrund hjælper helt klart.

IM Ensomhed? Jo, men Skype og konferencer og den slags, det hjælper jo lidt på ensomheden, når man snakker med sine fagfæller. Det er vanskeligt at fortælle sine forældre, hvad fanden det er, man egentlig beskæftiger sig med.

Det kan også på en vis måde være en fordel, at matematik er så vanskelig at forklare. Nu tænker jeg på det i økonomisk forstand: Hvorfor i alverden vil politikere give penge til sådan noget, som Søren og jeg laver? Det kan man egentlig godt undre sig over, men det er jo en del af den generelle menneskelige kultur, det skal man ikke underkende. Det er godt nok ikke så anerkendt i Danmark, som det er i fx Frankrig. Men matematik er altså en del af menneskehedens generelle kultur. Det kan være enormt svært at forklare det lille hjørne, man selv beskæftiger sig med, men så kan man jo forklare nogle af de store ting, som jeg prøvede det med historien om krumningen.

MR *Og selv om det ikke er det, der driver en selv, så er matematik faktisk blevet til en økonomisk drivkraft. Matematikken bliver brugt i mange forskellige tekniske og økonomiske sammenhænge og som redskab i andre videnskabelige fag... Og det er måske det, som politikerne i sidste ende forstår, og derfor er de villige til at investere.*

IM Man havde jo ikke haft computere, hvis der ikke havde været en matematik bag, der havde udviklet det. Det er jo helt givet. Eller det videoapparat, der optager os. Eller GPS-systemet. Der er matematik i næsten alle af de bekvemmeligheder, vi har.

Men faktisk tror jeg også, at en del politikere forstår det kulturelle aspekt. Vi sammenligner os med andre veludviklede lande, og dansk matematik er på et ret godt internationalt stade, og det er politikere også stolte over. De er stolte over Niels Bohr. De er stolte over, at vi deltager på lige

fod med andre udviklede nationer, på alle måder ikke kun mht. litteratur osv., men også på de videnskabelige områder.

Gode råd til matematikere "in spe"

MR *Til sidst: Har I et råd til et ungt menneske, der overvejer en karriere inden for matematik, eller måske et beslægtet fag. Hvad kan man gøre i den situation for at blive klogere, hvad kan man læse, hvem kan man henvende sig til, for at finde ud af, om det er det rigtige for en?*

TC Den første forudsætning er, at man virkelig godt kan lide matematik! Det kommer selvfølgelig an på hvilket niveau man stiler efter. Men hvis man drømmer om et niveau som forsker, så er man nødt til at brænde for det.

SG Vi har mest snakket om en forskerkarriere. Jeg synes det er vigtigt at få med er, at i første omgang skal man tænke, om man gerne vil tage en bachelor og en kandidatgrad. Så finder man undervejs nok ud af, om forskervejen er den rigtige, i løbet af de 3-5 år, det tager. Hvis man allerede i gymnasiet er interesseret i matematik og overvejer, om man måske kunne blive forsker, så er der ret stor sandsynlighed for, at det vil være det rigtige valg at starte på universitetet og tage en matematikgrad.

EF Hvis man brænder for matematik, så er det virkelig værd at prøve at studere det. Det er en unik oplevelse, der er et stort fællesskab i Bachelor uddannelsen. Og som jeg har sagt tidligere – man kan studere mange ting med matematik, men det er nok sværere at skifte fra et andet fag og lige tage et kursus i matematik end omvendt.

MR *Der er jo desværre færre kvinder i matematik end mænd, måske især i Danmark. Elisenda, har du en ide om, hvad der ligger bag? Er der noget der gør det vanskeligere for kvinder at læse matematik og at forblive i faget?*

EF Det ved jeg faktisk ikke. I Sydeuropa udgør kvinderne mere end 50% af de studerende, der læser matematik. I Danmark er det 30%. Jeg forstår ikke hvor forskellen kommer fra. Jeg ville gerne forstå årsagen. Baggrunden er jo helt den samme, fra folkeskolen og op. Jeg føler ikke, jeg er kvindelig matematiker, jeg er matematiker. Der er flere kvinder i anvendt matematik, og der er nogle, der forklarer det med, at kvinder har mere behov for det sociale, og at de motiveres mere af at "gøre noget for samfundet". Og her giver anvendt matematik måske mere. Jeg ved det ikke. Men jeg opfordrer alle kvinder, der kan lide matematik, til at vælge det!

MR *Har I forslag til litteratur?*

TC Der skrives jo mange relativt let tilgængelige artikler, så der er meget her, man kan prøve. Jeg tænker på noget som Notices (fra AMS), som måske er på et relativt højt plan ift. hvad de kender, men som alligevel er tilgængelig. Så er der klassikere, som Courant og Robbins' bog *What is mathematics* eller d'Arcy Thompson's *On Growth and Form* som min gamle kollega Peter Lax kom til mig med engang. Den har jeg stadig på listen over emner, jeg gerne ville studere nærmere. Denne bog regnes for at være fødslen på matematisk biologi, og den var Courants favoritbog

(ifølge Peter Lax). Det er en kanon spændende bog, som jeg har brug for et fjumreår til at studere nøjere. Der er alle mulige spørgsmål i det værk, hvor svarene er ukendte.

IM Martin, du sagde at man kan altid få et job, hvis man har en bachelor, eller en kandidatuddannelse – eller en forskeruddannelse - i matematik. Der er job til alle, der er uddannet i matematik. Da jeg gik i gymnasiet, da var der et bestemt bogsystem, man brugte på universitetets første år – Bohr og Møllerup kaldte man simpelthen systemet – den læste jeg, da jeg gik gymnasiet. Det er et ret stort system (4 bøger) og det kan man selvfølgelig gøre mere eller mindre. Man kan opsøge den slags bøger og se, om det er noget for en. Det vil være naturligt, når man prøver at finde ud af, hvilken slags karriere, man skal satse på. Det er svært for unge mennesker at finde deres vej. Jeg vil gerne tilføje: Jeg synes at den måde man pisker unge mennesker på nu er højst ubehageligt. Fremdriftsreformen er noget af det værste, politikerne nogensinde har fundet på. Det kræver sin tid at blive uddannet, og man skal også have tid til at være et normalt ungt menneske. Det kan ikke nytte noget, at man bare stikker næsen ned i bøgerne. Man skal udvikle sig på alle mulige måder. Og man skal i øvrigt også have det lidt sjovt.

MR *En udmærket afslutningsreplik! Tak til jer alle sammen!*