

qubits og entanglement
Kvantemekanikkens forunderlige verden

Projektmaterialer
til Jan Philip Solovej's to film:
A. Hvorfor har ting den størrelse de har
B. bits og qubits

Mads Peter Steenstrup og Bjørn Grøn (red)

© 2015 Konceptet: Matematisk forskning - 10 Danske matematikere - 10 Matematiske fortællinger er udviklet af lærebogssystemet *Hvad er matematik?*

Bjørn Grøn, Bjørn Felsager, Bodil Bruun & Olav Lyndrup

© 2015 Filmene og de tilhørende projektmaterialer er produceret af lærebogssystemet *Hvad er matematik?*

Forsideillustrationer: Ulla Korgaard, Designeriet

Filmene og de tilhørende projektmaterialer kan frit downloades og anvendes til selvstudium og i undervisningen. Hverken film eller projektmaterialer må gøres til genstand for kommerciel udnyttelse. Filmene findes her [Link til film](#)

qubits og entanglement - Kvantemekanikkens forunderlige verden

Projektmateriale i tilknytning til Jan Philip Solovej's to film:

A. Hvorfor har ting den størrelse de har

B. bits og qubits

Mads Peter Steenstrup og Bjørn Grøn (red)

Vi har forsøgt at finde eventuelle rettighedsindehavere, som kan tilkomme honorar i henhold til loven om op-havsret. Skulle der mod forventning være rettighedsindehavere, som måtte have krav på vederlag, vil dette blive håndteret, som om der var indgået en aftale.

Film og tilhørende materialer er produceret med støtte fra bla. Undervisningsministeriets udlodningsmidler, IKV, SDU og Cryptomathic

Indholdsfortegnelse

1 Indledning	5
2 Den deterministiske verden	6
3 Usikkerheden er fundamental	6
3.1 Hvorfor er der atomer, og os?	8
4 EPR	9
5 Kvantecomputer og Kvantebit	10
5.1 Måling af elektronens spin	11
5.2 Kvantematematik	11
5.2.1 Prikprodukt	15
6 Måling på et kvantesystem	15
7 Matricer	17
7.1 Matrix virkende på en vektor	18
8 Rotation	20
8.1 Egenvektorer og egenverdier	21
9 Gennemsnit	22
9.1 Matrix virkende på vektorer, igen	23
10 Rotation med komplekse tal	25
10.1 Regning med komplekse tal	26
10.2 Kvantebit - Den generelle form og Bloch-sfæren	28

10.2.1 Måling	30
11 Spillet	32
11.1 Det klassiske spil	32
12 Flere kvantebits	35
12.1 EPR og entanglement	35
12.2 GHZ tilstanden	37
13 Vinderstrategi	38
13.1 Opsummering	40
14 No cloning	42
14.1 Kommunikation mellem Alice og Bob	43
14.2 Sikker kommunikation	43
15 Kvantecomputer	45
15.1 IBM quantum experience	45
15.2 Enkelt kvantebit	47
15.3 flere kvantebits	48
15.3.1 GHZ tilstanden	49
15.4 Resultater af kvantesimulering	50
A Appendiks 1 - Komplekse tal	52
B Appendiks 2 - Den komplekse eksponentialfunktion	63
C Appendiks 3 - Sfærisk geometri og Bloch-sfæren	71

1 Indledning

Dette projektmateriale er skrevet i tilknytning til filmene *Størrelsen på alting – Hvorfor har ting den størrelse de har?* og *bits og qubits – om den forunderlige kvanteverden.*, der indgår i serien om matematisk forskning: 10 danske matematikere – 10 matematiske fortællinger. I filmen fortæller professor Jan Philip Solovej om, hvordan kvantemekanikken kan bruges til at løse problemer, som vil være uløselige med en klassisk forståelse af verden. Illustrationerne er fra en præsentation lavet af, Matthias Christandl.

Materialet kan bruges som perspektivering til matematikundervisningen, eller i forbindelse med SRP i matematik og fysik. Dokumentet indeholder matematiske emner som matricer og komplekse tal i relation til kvanteberegninger. I tilknytning til materialet er der nogle appendix'er, hvor emnerne komplekse tal, den komplekse eksponentialfunktion, samt sfærisk geometri behandles lidt mere udførligt. Der er igennem materialet en række opgaver, så eleverne selv kan vise væsentlige pointer. Kvanteberegningerne bliver eksemplificeret med GHZ-spillet, hvor lokalitet eller realisme bliver brudt. Det er muligt at fokusere på udvalgte matematiske emner.

2 Den deterministiske verden

Ifølge den klassiske mekanik kan verden beskrives deterministisk. Hvis vi kender nok til begyndelsesbetingelserne, kan vi beregne, hvor vi ender. Det kan være vi skal kende få variable, som når vi beregner længden af et kast ud fra starthastighed og kastevinkel. Andre gange har man brug for mange flere variable. Udviklingen af vejret den kommende uge eller måned afhænger af milliarder og atter milliarder af variable. Ifølge klassisk mekanik kunne vi i princippet kortlægge alle disse, selv om det i praksis er helt urealistisk. Meteorologerne vil derfor aldrig nå frem til helt præcise vejrudsigter, selv om modellerne bliver bedre og bedre. Men for den klassiske mekanik er det et praktisk, ikke et principielt problem. Selv for ret ukomplicerede systemer kan vi heller ikke gøre os håb om at forudsige begivenheder. Et møntkast ser tilfældigt ud, men det skyldes ifølge klassisk teori kun vores manglende evne til at holde styr på alle variablene. Alle de mange variable, som ligger til grund for tilsyneladende tilfældige hændelser, kan defineres som skjulte variable.

Definition 1 (Skjult variabel)

En skjult variabel er en forklarende variabel med signifikant betydning for det spørgsmål, man undersøger, men som vi ikke har afdækket eller måske slet ikke har kendskab til (endnu).

Selvom det ikke er praktisk muligt, er det fundamentalt i en klassisk forståelse af verden, at begivenheder har en årsag og at vi derfor vil kunne forudsige den, hvis vi kendte årsagen.

3 Usikkerheden er fundamental

Denne sikkerhed, at vi vidste hvordan verden fungerede, blev udfordret af fremkomsten af kvantemekanikken i begyndelsen af det 20. århundrede. Man vidste, at henfald af atomkerner tilsyneladende forekom tilfældigt. Det var muligt at bestemme, hvornår halvdelen af radioaktive atomer var henfaldet, men hvis man ville vide, hvornår ét specifikt atom henfaldt, var det umuligt. Det er nærliggende at tolke denne tilfældighed, som vores uvidenhed om atomkernerne. Man kan forestille sig et lille ur i hvert atom, som tikker derudaf og helt forudsigeligt bestemmer, hvornår atomet henfalder. Hvis vi ikke kender til uret, vil det være den skjulte variabel og det tilsyneladende tilfældige henfald skyldes kun vores uvidenhed. I 1927 vandrede Werner Heisenberg (1901-1976) gennem Fælledparken og kom op med Heisenbergs ubestemthedsprincip, som vendte denne forståelse af verden på hovedet.

Ifølge Werner Heisenberg er der fundamentale størrelser i naturen, som vi ikke kan kende på samme tid. Det er kun størrelser, som gør sig gældende på meget små

skalaer og bestemmer hvordan atomer, elektroner, fotoner og andet småt opfører sig. Ubestemthedsprincippet siger at nogen ting kan vi ikke kende helt præcist samtidigt. Det kaldes derfor også for usikkerhedsrelationen. Hvis vi for eksempel prøver at bestemme en partikels bevægelsesmængde - som er lig med hastighed gange masse - meget præcist, så bliver usikkerheden på, hvor den befinder sig, meget stor. Den anden vej rundt siger usikkerhedsrelationen at vi, hvis vi ved hvor en elektron ér, ingen anelse har om hvor hurtigt den bevæger sig. Hvis vi derimod kender dens hastighed, må vi opgive at sige noget om, hvor den befinder sig. Hvis man forestiller sig et målfoto af 100 meter løbere, så bruges det jo til at fastslå hvem der kom først, altså befandt sig på målstregen. Det enkelte foto fortæller ikke præcis, hvor hurtigt løberne bevæger sig, denne information er skjult. Matematisk kan usikkerhedsrelationen for hastighed og bevægelsesmængde formuleres:

Sætning 1 (Heisenbergs usikkerhedsrelation)

Usikkerhedsrelationen siger, at hvis positionen bestemmes med en nøjagtighed på Δx og bevægelsesmængden bestemmes med en nøjagtighed på Δp så vil produktet overholde uligheden,

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{h}{4\pi}, \quad (1)$$

hvor $h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{m}^2\text{kg/s}$ er Plancks konstant.

Plancks konstant er den mest fundamentale konstant i kvantemekanikken og forbinder bl.a. en foton's frekvens og energi gennem $E = h \cdot f$.

Øvelse 1

En elektron har massen $m = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{kg}$, og befinder sig i et atom inden for en radius, $r_0 \approx 5 \cdot 10^{-11} \text{m}$.

- *Bestem usikkerheden i elektronens hastighed.*

Øvelse 2

En bil kører ca. 100km/time ($\pm 2 \text{km/time}$) og vejer $m = 1000 \text{kg}$.

- *Vurder hvor stor usikkerheden i bilens hastighed er.*
- *Beregn usikkerheden i bilens position.*
- *Beskriv hvorfor vi ikke oplever usikkerhedsrelationen i vores hverdag.*

3.1 Hvorfor er der atomer, og os?

Vi kan bruge usikkerhedsrelationen til at vise hvorfor atomer ikke kolliderer. Vi ser på et brintatom med én proton i kernen og én elektron omkring. Ifølge klassisk mekanik er energien af elektronen summen af kinetisk energi og potentiel energi. Det er givet ved,

$$E(r) = \frac{1}{2} \cdot mv^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (2)$$

hvor $\frac{1}{2} \cdot mv^2$ er den kinetiske energi og $-\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$ er den potentielle energi som kommer af den elektriske tiltrækningskraft mellem den positive proton og den negative elektron. Konstanten ϵ_0 kaldes for vakuumpemabiliteten og har størrelsen $8,85 \cdot 10^{-12}$ Farad/m. Konstanten e er elementarladningen og har en størrelse på $-1,6 \cdot 10^{-19}$ C. (Alt er i SI-enheder).¹

Øvelse 3

Lav en funktionsundersøgelse og vis, at energien går mod minus uendeligt når radius går mod nul. $\lim_{r \rightarrow 0} E(r) = -\infty$

Øvelsen viser, at det vil være energimæssigt fordelagtigt for elektronen at befinde sig i kernen. Der vil derfor ikke være nogen stabil ligevægt, hvor elektronen befinder sig udenfor atomkernen. For fysiske systemer glæder sætning 2.

Sætning 2 (Minimering af energien)

Et fysisk system vil være i stabil ligevægt i den tilstand som minimerer energien.

For en bold vil det at ligge for foden af en bakke være en stabil ligevægt, mens det at ligge på toppen ikke vil være det. Her er det den potentielle energi - som skyldes tyngdekraften - som er mindre i bunden af bakken end på toppen.

Hvis vi bruger usikkerhedsrelationen, ser billedet anderledes ud. Den kinetiske energi kan skrives som,

$$E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m}, \quad (3)$$

p er bevægelsesmængden og den hænger nu sammen med elektronens position, gennem usikkerhedsrelationen. Hvis elektronen nærmer sig kernen, bliver stedet mere bestemt, og derfor bliver bevægelsesmængden større. Det kan vises, at den gennemsnitlige bevægelsesmængden kan skrives som

$$p = \frac{\hbar}{r} \quad (4)$$

¹Bemærk: I filmen om Størrelsen af alting præsenteres formlen for $E(r)$ ca 11.5 minut inde i filmen. Der er på planchen glemt den proportionalitetskonstant foran det sidste led, der her er med i ligning 2. Fra Fysik kender i coulombs lov for kraften mellem to ladninger, $F = k_c \cdot \frac{|q_1||q_2|}{r^2}$ og $k_c = \frac{1}{4 \cdot \pi \epsilon_0}$. Den potentielle energi som kan findes ud fra arbejdet, $A = \int_{\infty}^r F \cdot dx$.

Øvelse 4

- Brug ovenstående til at vise at elektronens energifunktion bliver.

$$E(r) = \frac{\hbar^2}{2mr^2} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (5)$$

Øvelse 5

- Lav en funktionsundersøgelse og vis, at energien nu går mod uendelig, når elektronen nærmer sig kernen. $\lim_{r \rightarrow 0} = +\infty$.

Det vil derfor kræve uendeligt meget energi for elektronerne at kollapse ind i kernen. Det kan forklare stabiliteten af vores atomer. En lidt mere krævende øvelse er at finde minimum for energifunktionen.

Øvelse 6

- Tegn energifunktionen ind i et koordinatsystem og zoom ind omkring $r = 10^{-11}$ og undersøg grafens egenskaber.
- Vis at energifunktionene $E(r) = \frac{\hbar^2}{2mr^2} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$ differentieret mht. afstanden, r , giver.

$$\frac{dE(r)}{dr} = -\frac{\hbar^2}{mr^3} + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (6)$$

- Løs ligningen $\frac{dE(r)}{dr} = 0$ og vis ved at indsætte elektronens masse, $m = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{kg}$ at afstanden bliver $r_0 \approx 5 \cdot 10^{-11} \text{m}$.

Som Jan Philip Solovej redegør for i filmen, svarer det godt til den eksperimentelt bestemte radius på et brint atom. Vi har dermed vist, at størrelsen af et brintatom kan udledes af de kvantemekaniske regler, hvor specielt Heisenbergs usikkerhedsrelation er vigtig.

4 EPR

Den fundamentale usikkerhed, som er en del af kvantemekanikken, var svær at acceptere for mange fysikere. Den mest prominente modstander var Albert Einstein som sammen med kollegaerne Boris Podolsky og Nathan Rosen beskrev det såkaldte EPR paradoks. Paradokset går ud på at måle på to partikler i stedet for en, så man kan måle position af den ene partikel og bevægelsesmængde fra den anden. Paradokset ligger i, at det på den måde skulle være muligt at bryde Heisenbergs usikkerhedsrelation. Paradokset demonstrerer derved, at kvantemekanikken ikke er den fulde beskrivelse, og at der derfor må være skjulte variable, som teorien ikke tager højde for. Selvom paradokset var tænkt

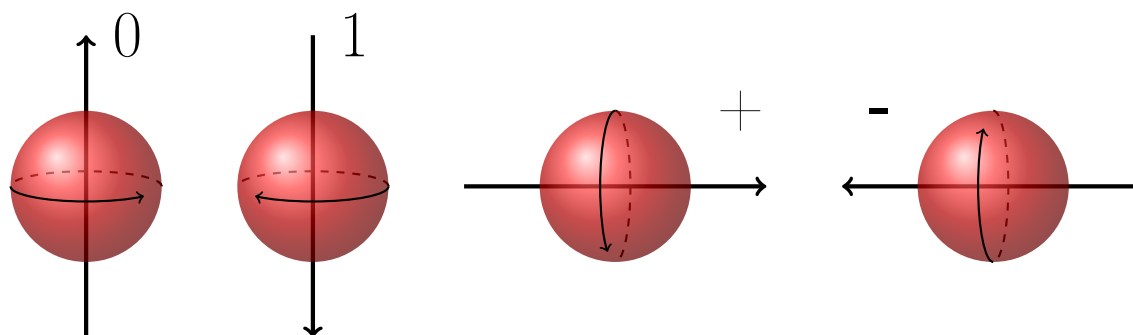
som en tilbagevisning af kvantemekanikken, ligger den til grund for Bells ulighed, som er blevet brugt til at teste kvantemekanikken gennem de sidste 50 år. Det er tests som entydigt har vist, at den kvantemekaniske beskrivelse holder, og at den klassiske ikke gør.

I den anden film om bits og qubits gennemføres et argument, der påviser, at kvantemekanikkens mærkelige fænomener ikke kan forklares med skjulte variable.

5 Kvantecomputer og Kvantebit

Kvantecomputere er computere som udnytter kvantemekanikken til at foretage beregninger. Der er mange forskellige slags kvantesystemer, som kan bruges til at bygge en kvantecomputer. Vi vil beskrive det ud fra egenskaber ved en elektron, men det kunne også være superledende kredsløb eller polarisation af fotoner.

Elektroner har en egenskab, som hedder spin. Man kan forestille sig, at elektronen er en snurretop og den fysiske analog til 0 er, at den spinner mod urets retning, om en lodret akse, der følger tommelfingerens retning, når vi lader de andre fingre følge spinnets retning. mens 1 er at den spinner med urets retning om en lodret akse, der følger tommelfingeren, når vi lader de andre fingre følge spinnets retning. Den kan også spinne om en vandret akse, enten mod højre, der kaldes + (plus), eller mod venstre, der kaldes - (minus), hvor højre og venstre fastlægges på samme måde som op og ned. *Og den kan spinne om en akse, der peger i alle mulige andre retninger.* De fire nævnte tilstande med de udfaldene, $\{0, 1\}$ og $\{+, -\}$ er vist i figur 1. Men ligegyldig hvilken orientering, vi måler efter, vil vi altid finde, at spinnet lægger sig parallelt med denne akse og enten peger i aksens retning eller modsat. Dette er et eksempel på kvantiseringen i kvantemekanikken, ligesom elektroner ikke kan hoppe halve orbitaler ved eksitation, kan spinnet ikke være lidt en retning.



Figur 1: Elektron målt vertikalt og målt horisontalt.

Spin i kvanteverden er ikke ækvivalent med spin i makroverden, så det er en lidt uheldig

betegnelse. Hvis der var noget, der snurrede rundt, så kan man vise, at hastigheden ville overstige lysets hastighed. Ordet kom til veje lidt tilfældigt. I makroverden ved man, at en elektrisk strøm gennem en spole skaber et magnetfelt. Nordpolen findes i tommelfingerens retning, hvis man med højre hånd griber om spolen, så fingrene følger spolens vindinger ("strømmens retning"). Da man opdagede, at den elektrisk ladede elektron også havde magnetiske egenskaber, tænkte man baglæns, at dette måtte være genereret af en elektrisk strøm, skabt ved at elektronen snurrede rundt, at den "spinnede".

5.1 Måling af elektronens spin

Vi vil ikke gå ind i den detaljerede beskrivelse af, hvordan man måler en elektrons spin. Det vigtige er, at man vælger hvilken akse, man måler elektronens spin langs.

Antagelser 1 (Måling på et kvantesystem)

Enhver måling på et kvantemekanisk system tvinger systemet til at være i en af egentilstandene for målingen.

Det betyder i vores system, at hvis vi måler vertikalt, vil elektronernes spin altid vise sig enten at pege op eller ned. Lad os sige den pegede op. Så vil efterfølgende målinger også give dette resultat. Systemet er i det, som kaldes en egentilstand for måling vertikalt, og der bliver den, indtil vi foretager en måling i en ny retning. Men hvis vi nu måler horisontalt, vil vi finde elektronen pegende enten til højre eller til venstre. Klassisk logik fortæller os, at når elektronerne før var op, så er de hverken højre eller venstre. Og omvendt, havde vi først målt, at spinnet var horisontalt, så er det ikke vertikalt. Det stemmer bare ikke over ens med vores målinger. For hvis vi nu igen måler spinnets efter den vertikale akse, så vil vi igen finde, at den enten peger op eller ned. Men ikke nødvendigvis op som før. Der er nu 50 pct. sandsynlighed for op og 50 pct. for ned. Dette er udmærket illustreret i en youtube video².

Ved en horisontal måling siger vi, at elektronens spin peger enten til højre eller venstre, men faktisk vil det være lige så korrekt at sige at den er i en *superposition* af at pege op og ned - det begreb vender vi tilbage til. Dette er mærkeligt, men netop det som gør, at kvantecomputeren kan fungere fundamentalt anderledes end klassiske computere.

5.2 Kvante-matematik

Vi vil nu tage fat på at udvikle den matematik, der skal til for at beskrive en qbit, den kvantemekaniske bit. Det foregår skridt for skridt, først ved brug af vektorer, som

²[Quantum Spin - Visualizing the physics and mathematics](#)

vi kender dem, dernæst inddragelse af matricer, men vi er først ved vejs ende, når vi udvider vores tal til *de komplekse tal*. Det betyder, at vi skal være varsom med at lægge for meget i de billeder, vi danner undervejs. Kvanteverden er altid mere kompliceret, end vi kan forestille os!

Vi beskriver vores qbit ved at beskrive dens tilstande. En qbit kan beskrives ved en todimensional normeret vektor, dvs. en vektor med længden 1.

Definition 2 (Kvantetilstand 0 og 1 samt + og -)

De to tilstande 0 og 1 kan matematisk beskrives med 2-dimensionelle vektorer og har symbolet, $|\rangle$, kaldet en ket

$$\text{spin op: } |0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$\text{spin ned: } |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

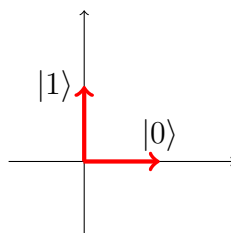
Tilsvarende betegnes de to tilstande spin til højre og spin til venstre med symbolerne $|+\rangle$ og $|-\rangle$. Det er helt tilsvarende to-dimensionale vektorer. Deres koordinater vender vi tilbage til.

Betegnelsen ket forklares senere.

Øvelse 7

- Argumenter for, at tilstandene $|0\rangle$ og $|1\rangle$ er ortogonale enhedsvektorer.

Vi visualiserer her de to spin vektorer som enhedsvektorerne langs hhv. x-aksen og y-aksen i et almindeligt koordinatsystem.



Figur 2: To ortogonale kvantetilstande, $|0\rangle$, $|1\rangle$.

Det stemmer bare dårligt overens med, at elektroner enten spinner op eller ned. Samtidig viser det sig, at *enhver* tilstand kan beskrives som en kombination af op og ned. Men det er jo ikke tilfældet i planen: Hvis vi ser på to vektorer, der peger i hver sin retning, så vil enhver kombination af disse pege i samme retning. Derfor vælger vi i første omgang en repræsentation hvor "op" og "ned" er ortogonale. Længere fremme

når vi går over til at bruge komplekse tal, præsenterer vi den såkaldte *Bloch-sfære* som et velegnet koordinatsystem til beskrivelse af kvantetilstande. Vi gennemgår dette i afsnit, [10.2](#).

Vi kan bevæge os rundt i koordinatsystemet ved brug af de to vektorer, $|0\rangle$ og $|1\rangle$, som vi normalt gør ved at gå frem og tilbage af x- og y-aksen. Hvis vi på den måde kan skabe alle andre vektorer ud fra et mindre sæt kan disse være en basis for alle andre vektorer. Der gælder følgende definition

Definition 3 (Komplet ortonormalbasis)

Givet et sæt af vektorer, der er indbyrdes ortogonale, og alle har længden 1. Hvis alle andre vektorer kan skrives som en linear-kombination af disse, kaldes sættet af vektorer en komplet ortonormalbasis.

Hvis vi bruger sætningen på vores normale 2-dimensionale koordinatsystem, kan den komplette ortonormalbasis bestå af enhedsvektoren parallel med x-aksen og enhedsvektoren parallel med y-aksen. Basisvektorerne er her $\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ og $\vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Øvelse 8

- Konstruer vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ ud af basisvektorerne.
- Konstruer vektoren $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ ud af basisvektorerne.
- Konstruer vektoren $\vec{c} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$ ud af basisvektorerne.
- Konstruer vektoren $\vec{d} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$ ud af basisvektorerne.

Til vores kvantebits bruger vi tilstandene, $|0\rangle$ og $|1\rangle$ som vores ortonormalbasis.

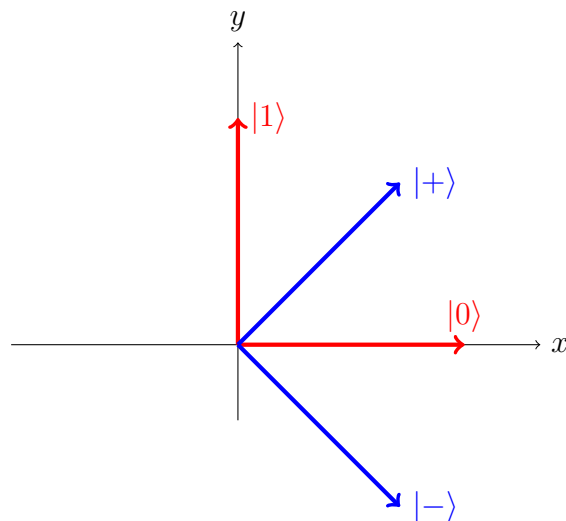
Sætning 3 (basis for en kvantebit)

Tilstandene

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ og } |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (9)$$

udgør en komplet ortonormalbasis for mængden af kvantebits

Det betyder, at en vilkårlig kvantebit kan skrives som en sum af $|0\rangle$ og $|1\rangle$. Det er netop superpositionen igen, men her beskrevet med lineær algebra, vektorregning, hvor det hedder linear-kombination.



Figur 3: De fire kvantemekaniske tilstande i kartesisk koordinatsystem.

Øvelse 9

- *Beskriv i ord, hvad det vil sige, at en kvantetilstand er en linearkombination af $|0\rangle$ og $|1\rangle$.*
- *Brug figur 3 til at argumentere geometrisk for, at tilstandene $|+\rangle$ og $|-\rangle$ er linearkombinationer af, $|0\rangle, |1\rangle$.*
- *Brug figur 3 til at vise formlerne:*

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (10)$$

$$|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (11)$$

Vi kan nu undersøge egenskaberne for de nye vektorer.

Øvelse 10

- *Vis, at $|+\rangle$ og $|-\rangle$ er ortogonale og har længde 1.*

Vi kan se at $|+\rangle$ og $|-\rangle$ har samme egenskaber som tilstandene $|0\rangle$ og $|1\rangle$.

5.2.1 Prikprodukt

Vi har brugt prikproduktet nogle gange. Formalismen med ket, $| \rangle$, kan udvides med en bra, $\langle |$ og prikproduktet for tilstandene a og b er,

$$\langle a|b \rangle = (a_1, a_2) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2. \quad (12)$$

(Parentes hedder på engelsk bracket, og det er selvfølgelig herfra de to ord stammer)

Vi kan samle hovedpointerne om de fire kvantetilstande.

Resultater 1

- $\langle 0|0 \rangle = \langle 1|1 \rangle = \langle +|+ \rangle = \langle -|- \rangle = 1$
- $\langle 0|1 \rangle = \langle +|- \rangle = 0$
- $\langle 0|+ \rangle = \langle 1|+ \rangle = \langle 0|- \rangle = \langle 1|- \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Øvelse 11

- *Vis resultaterne i Resultater 1.*

Vi kan altså se at tilstandene $|+\rangle$ og $|-\rangle$ ikke er ortogonale.

6 Måling på et kvantesystem

Hvis vi måler i $\{0, 1\}$ basen får vi, at vores kvantetilstand enten er spin op eller spin ned, ligegyldigt hvilken kvantetilstand systemet var i før målingen. Vi kan derfor ikke observere en superposition med en enkelt måling, den giver sig først til kende, når vi måler mange gange på identiske kvantesystemer. Med en qbit i tilstanden, $|+\rangle$, vil målinger i $\{0, 1\}$ basen give tilstand $|0\rangle$ 50% af gangene og tilstand $|1\rangle$ 50% af gangene. Det vil i hver enkelt måling være umuligt at sige, hvilket resultat vi får, men ved mange målinger vil vi få halvt af hver.

Sandsynligheden for at måle kvantebitten i en tilstand beregnes ved brug af prikproduktet.

Definition 4

Sandsynligheden for at måle en qbit i kvantetilstanden $|\psi\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, når kvantetilstanden faktisk er $|\phi\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ beregnes som

$$P(\psi|\phi) = |\langle\psi|\phi\rangle|^2 = \left| \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \right|^2 = |a \cdot \alpha + b \cdot \beta|^2$$

Vi kan nu beregne sandsynligheden for at måle vores qbit i tilstand $|0\rangle$, når den er i kvantetilstanden $|+\rangle$.

$$\begin{aligned} P(\langle 0|+\rangle) &= |\langle 0|+\rangle|^2 = \left| \langle 0| \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \right|^2 \\ &= \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \langle 0|(|0\rangle + |1\rangle) \right|^2 \\ &= \left| \frac{1}{\sqrt{2}} (\langle 0|0\rangle + \langle 0|1\rangle) \right|^2 = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} (0 + 1) \right|^2 \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned} \tag{13}$$

Øvelse 12

- Vis, at $P(\langle 1|+\rangle) = 50\%$.
- Vis, at $P(\langle 1|-\rangle) = 50\%$.

Vi kan se, at sandsynligheden netop er 50% for at måle vores qbit i tilstand $|0\rangle$ og 50% i tilstand $|1\rangle$. Vi har dermed vist, at en horisontal kvantisering netop giver lige stor sandsynlighed for at måle spin op og spin ned.

Øvelse 13

Vi ved, at vores qbit befinder sig i en af tilstandene, $|0\rangle, |1\rangle, |+\rangle, |-\rangle$. Antag, at vi ved en måling finder en qubit i tilstand $|1\rangle$.

- Hvilken tilstande kunne vores qbit have været i før målingen?
- Hvilken tilstand kunne vore qbit helt sikkert ikke have været i før målingen?

Øvelse 14

Alice måler på en qbit, der oprindeligt er i tilstand $|1\rangle$ og får resultatet $|+\rangle$. Efter hendes måling sender hun sin qbit videre til Bob, som måler, om den er i tilstand $|1\rangle$.

- Hvilket resultat kan Bob få?
- Hvad er målesandsynlighederne?

7 Matricer

Mens tilstande kan beskrives ved vektorer, kan operatorer (operationer / manipulationer, vi foretager på tilstandene) beskrives med matricer. Ligesom normale operatorer, gange, kvadratrods osv. virker på tal, virker matricerne på vektorer. Det hedder én matrix, matricen og flertal matricer, og notationen er, at man bruger store bogstaver som navne på matricer. En todimensional matrix kan skrives som,

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

hvor $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ er tal og kaldes matricens elementer. Addition og subtraktion er rimeligt ligetil.

Definition 5 (matrix addition og subtraktion)

Man adderer matricer ved at addere elementer med samme position i matricerne med hinanden,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Tilsvarende subtraherer man to matricer ved

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} - b_{11} & a_{12} - b_{12} \\ a_{21} - b_{21} & a_{22} - b_{22} \end{pmatrix}. \quad (15)$$

At gange matricer sammen er mere kompliceret. Det gøres som følger,

Definition 6 (Matrixmultiplikation)

Man ganger matricer ved at udregne prikproduktet af første række med første søjle og skriver det på første plads, (1,1) i den nye matrix. Man ganger derefter første række med anden søjle og skriver det på plads (1,2). Alt i alt ser multiplikation af $2 \cdot 2$ matricer således ud:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} & a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} \\ a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} & a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Matrixmultiplikation af to lige store matricer giver derfor en ny matrix med samme dimensioner. Figur 4, viser hvordan element (1,1) i den nye matrix fremkommer ved at prikke række med søjle.

Skalarer er kommutative, hvilket vi kender fra reglen, at faktorernes orden er ligegyldig. Med Matrixmultiplikation betyder rækkefølgen noget, og den er derfor ikke kommutativ.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} & a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} \\ a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} & a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} \end{pmatrix}$$

Figur 4: Matrixmultiplikation hvor første række er vist ganget med første søjle.

Sætning 4 (Ikke kommutativitet af matrixmultiplikation)

For matricer gælder den kommutative regel: $A \cdot B = B \cdot A$ ikke generelt.

Vi beviser det ved at give et modeksempel.

Bevis 1

Vi vælger to matricer $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ og $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ og udregner produkter

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (17)$$

mens den anden vej giver

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (18)$$

De to resultater er ikke samme matrix, så sætning 3 er bevist, og vi kan konkludere at matricer ikke er kommutative m.h.t. multiplikation.

Dette er radikalt anderledes end vores normale tal, og Heisenbergs usikkerhedsrelation kan faktisk vises ud fra at matricer ikke er kommutative.

7.1 Matrix virkende på en vektor

Formålet med at introducere matricer er, at de skal bruges til at manipulere vores kvantetilstande, repræsenteret ved vektorer. En matrix virker på en vektor ved at blive gange på fra venstre.

Definition 7 (Matrix virkende på en vektor)

En matrix, M virker på vektoren, \vec{b} fra venstre, ved at prikke rækkerne i matricen med søjlen i vektoren,

$$M\vec{b} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_1 + a_{12}b_2 \\ a_{21}b_1 + a_{22}b_2 \end{pmatrix}. \quad (19)$$

Derved kommer der en ny vektor med samme dimensioner som \vec{b} . Bemærk at der ikke er en regel hvis rækkefølgen er omvendt $\vec{b}M$.

En matrix virkende på en vektor giver derfor en ny vektor. Dette gør, at vi kan bruge dem til symbolsk at manipulere vores kvantetilstande. Hvis f.eks. vi lader matricen $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ virke på vektoren $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ får vi,

$$M\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \\ 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (20)$$

Vi kan se, at matricen ændrer tilstanden fra spin op til spin ned.

Øvelse 15

- Vis, at en vektor ikke ændrer sig ved at blive ganget med $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. I kaldes enhedsmatricen og er matricernes ettal.
- Vis, hvordan spin ned bliver påvirket af matricen $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$
- Begrund, hvorfor matricen, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ kaldes en spin flip matrix.
- Overvej, hvordan matricen skal se ud, hvis man skal roterer fra spin op til tilstanden højre, $|+\rangle$.

For at gå fra tilstanden *spin op* til *højre* kræver det en rotation på 45° . Vi så i ligning 10 at de to tilstande kan skrives således på vektorform:

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ og } |-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (21)$$

Matricen til at foretage denne rotation kaldes en Hadamard operator og skrives som

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (22)$$

Det overlades til en øvelse at vise, at en Hadamard netop giver de to tilstande.

Øvelse 16

- Vis, at $H|0\rangle = |+\rangle$.
- Vis, at $H|1\rangle = |-\rangle$.
- Vis, at $H|+\rangle = |0\rangle$.
- Vis, at $H|-\rangle = |1\rangle$.

Vi har nu værktøjerne til at ændre kvantiseringen af vores qbit mellem *spin op*, *spin ned*, *højre* og *venstre*.

8 Rotation

Den generelle rotation sker med rotationsmatricen, $R(\theta)$. Hvis vi godt vil rotere vores kvantebit, θ grader mod skal vi bruge følgende matrix

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (23)$$

Hvis vi vil rotere fra tilstand $|0\rangle \rightarrow |1\rangle$ skal vi rotere 90° , fra x-aksen til y-aksen, se evt. figur 3.

Øvelse 17

- Vis, at en $\theta = 90^\circ$ rotation giver spin flip matricen, $R(90^\circ) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

- Vis, at en $\theta = 45^\circ$ rotation sker med matricen

$$R(45^\circ) |0\rangle = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Vis, at $R(45^\circ) |0\rangle = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} = |+\rangle$
- Vis, at $R(45^\circ) |1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, ikke giver tilstanden $|-\rangle$.
- Hvad sker der med tilstanden $|0\rangle$ ved en generel rotation,

$$R(\theta) |0\rangle = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

Vi kan skrive en generel tilstand af en qbit som $|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$, hvor koefficienterne a og b afgør, hvilken tilstand systemet er i.

Øvelse 18

- Vis, at en tilstand $|0\rangle$ ved en rotation giver tilstanden $|\psi\rangle = \cos(\theta)|0\rangle + \sin(\theta)|1\rangle$.
- Vis, at den roterede tilstand $|\psi\rangle$ er normeret, dvs. har længden en.

Vi har nu vist, at vi kan ændre vores kvantetilstand med rotationer og med basisskift, som vi gjorde med Hadamard matricen. Det var den, der skiftede mellem 0,1-basen og +,-basen. Og vi kan kombinere disse ved at gange matricer sammen. Vi har derfor nu udviklet et stærkt matematisk værktøj til at beskrive, hvad der sker, når vi ændrer vores kvantebit.

8.1 Egenvektorer og egenverdier

Når en matrix ganges på en vektor får vi en ny vektor. En matrix svarer derfor til en afbildning af mængden af alle to-dimensionale vektorer over i den samme mængde. At studere sammenhængen mellem matricer og sådanne afbildninger er kernen i den matematiske disciplin, der hedder lineær algebra. Vi vil her kalde sådanne afbildninger for matrix-afbildninger. Et af de interessante spørgsmål for matrix-afbildninger er, om der findes retninger i planen (eller i rummet, hvis vi arbejder i 3d), således at en vektor parallelt med denne ikke skifter retning efter at være ganget på matricen. De afbildninger, der hører til rotationsmatricer, har klart ikke denne egenskab - de er jo konstrueret til at ændre retningen på vektorerne.

Definition 8 (Egenvektor og egenværdi)

Hvis vektoren \vec{v} ikke ændrer andet end evt. længde og orientering (ensrettet / modsat rettet) ved en matrix-afbildning, så kaldes vektoren for egenvektor til matricen. Hvis $A\vec{v} = k\vec{v}$, hvor k er et tal, kaldes k for egenværdien hørende til v .

Spin op/ned tilstandene er egenvektorer til matricen, $S_{0,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Det kan ses ved at lade $S_{0,1}$ den virke på vektorerne fra venstre,

$$S_{0,1} |0\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (24)$$

$$S_{0,1} |1\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (25)$$

Vi får dermed egenværdierne, en og minus en. Matricerne med egenvektorer langs akserne hedder *Paulis spin matricer*, $S_{0,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $S_{+,-} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Øvelse 19

- Vis, at $|+\rangle, |-\rangle$, er egenvektorer for matrixafbildningen bestemt af $S_{+,-}$.
- Bestem egenværdierne for vektorerne.

Resultater 2 (Egenvektorer og egenverdier for Paulis spinmatricer)

$$S_{0,1} |0\rangle = |0\rangle \Rightarrow \text{egenværdi på } 1 \quad (26)$$

$$S_{0,1} |1\rangle = -|1\rangle \Rightarrow \text{egenværdi på } -1 \quad (27)$$

$$S_{+,-} |+\rangle = |+\rangle \Rightarrow \text{egenværdi på } 1 \quad (28)$$

$$S_{+,-} |-\rangle = -|-\rangle \Rightarrow \text{egenværdi på } -1 \quad (29)$$

For at kunne bruge resultaterne af en kvanteberegning, skal resultatet kunne bruges i en klassisk computer. De kvantemekaniske tilstande kan oversættes til det binære talsystem ved at lade,

$$1 \rightarrow 0 \quad (30)$$

$$-1 \rightarrow 1 \quad (31)$$

Analysen af egenværdier og egenvektorer indgår i mange dele af matematikken, og man kan fx læse mere om det i projektmateriale 2 til Steen Markvorsens film om minimalflader.

9 Gennemsnit

I afsnit 5.1, hvor vi introducerede måling på et kvantemekanisk system, forklarede vi bl.a., at hvis vi først har målt "op", så vil fortsatte målinger langs den vertikale akse give "op" hver gang. Men hvis vi nu indskyder en måling langs en horisontal akse, og derefter vender tilbage og måler vertikalt, så kan vi ikke vide, om den igen giver "op". I 50 pct af tilfældene giver den "op", i 50 pct af tilfældene giver den "ned". Men hvordan kan vi vide det? For har vi målt vertikalt igen og fået "op", så vil fortsatte målinger af den samme kvantebit jo også give "op". Så hvordan kommer sandsynlighederne (procenterne) ind i billedet. Det sker, ved at vi tester (måler) *mange ens kvantesystemer*, og derefter udregner gennemsnittet. Der gælder følgende notation:

Definition 9

Gennemsnittet af en måling ved matricen A over mange ens kvantesystemer med samme tilstand $|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$ skrives og udregnes således: $\langle A \rangle = \langle \psi | A | \psi \rangle$.

Hvis vores qbit er kvantiseret vertikalt med *spin op* ($|0\rangle$) bliver gennemsnittet af at måle i Z basen med matricen $S_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$,

$$\langle S_z \rangle = \langle 0 | S_z | 0 \rangle = (1 \ 0) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (1 \ 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1. \quad (32)$$

Vi får hver gang en værdi på en, og derfor bliver gennemsnittet selvfølgelig også en. Hvis vores qbit derimod er kvantiseret horisontalt med $|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$, bliver målinger vertikalt med S_z derfor,

$$\langle S_z \rangle = \langle + | S_z | + \rangle = \frac{1}{2} (1 \ 1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} (1 \ -1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} (1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1)) = 0. \quad (33)$$

Vi får her et gennemsnit på nul. Det kan vi fortolke sådan, at vi i gennemsnit vil måle lige mange *spin op* og *spin ned*, når kvantetilstanden er til højre. Det kan også vises ved brug af ket notationen,

$$\langle S_z \rangle = \langle + | S_z | + \rangle = \frac{1}{2} (\langle 0 | + \langle 1 |) S_z (| 0 \rangle + | 1 \rangle) = \frac{1}{2} (\langle 0 | + \langle 1 |) (| 0 \rangle - | 1 \rangle) = 1 - 1 = 0. \quad (34)$$

Ved tredje lighedstegn brugte vi, at $|0\rangle$ og $|1\rangle$ er egenvektorer til S_z med egenverdier, 1 og -1 . Dette er igen et udtryk for, at det er lige så sandsynligt at finde kvantesystemet i spin op som i spin ned, når det er kvantiseret horisontalt.

Øvelse 20

- Find $\langle S_z \rangle$ når kvantesystemet er i tilstand, $|1\rangle$.
- Find $\langle S_z \rangle$ når kvantesystemet er i tilstand, $|-\rangle$.

Vi kan måle i den retning vi har lyst til. En af dem kunne være midt mellem $\{0, 1\}$ og $\{+, -\}$ basen. Vi kan eks. måle gennemsnittet, hvis vi er i kvantetilstanden $|0\rangle$,

$$\frac{\langle S_z + S_x \rangle}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \langle 0 | (S_z + S_x) | 0 \rangle \quad (35)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} (1 \ 0) \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (36)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} (1 \ 0) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (37)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} (1 \ 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (38)$$

Vi finder altså gennemsnittet til $\frac{1}{\sqrt{2}}$, når kvantetilstanden oprindeligt er $|0\rangle$, når vi måler i den mærkelige blanding.

Øvelse 21

- Find gennemsnittet, når vi starter i $|1\rangle$ tilstanden.

9.1 Matrix virkende på vektorer, igen

Ovenfor fandt vi gennemsnittet ved af S_z ved en

$$\langle S_z \rangle = \langle 0 | S_z | 0 \rangle = (1 \ 0) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (1 \ 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1. \quad (39)$$

I den midterste del af udregningen skal man være påpasselig med rækkefølgen.

Øvelse 22

Brug definitionen 7 til at undersøge udregningen $(1 \ 0) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ved at.

- Hvorvidt $(1 \ 0) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ overholder definitionen.
- Hvorvidt $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ overholder definitionen.
- Hvad kommer der ud af den sidste udregning?
- Beskriv i hvilken rækkefølge hele udtrykket udregnes.

Ket, bra notationen er smart, men det kræver at man er påpasselig med hvilke regneregler der ligger bag.

10 Rotation med komplekse tal

I afsnit 5.2 arbejdede vi med rotation af kvantebits fra én tilstand, fx $|0\rangle$ til andre tilstande. Vi viste, hvordan en kvantisering i $\{+, -\}$ kan formuleres som en superposition af at være *spin op* og *spin ned*. Vi så også, at vektorerne *spin op* og *spin ned* $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, udgjorde en ortonormal basis, hvilket vil sige, at alle andre vektorer kan skrives som linearkombinationer af disse to vektorer.

Med den matematik, vi har nu, kan vi kun bevæge os i xy -planen. Men verden er jo ikke 2d, men 3d. For at få z -aksen med bliver vi imidlertid nødt til at introducere komplekse tal.

Komplekse tal er et helt matematisk emne for sig, og vi præsenterer kun en lille del af det her. I et appendiks A kan man fordybe sig yderligere i emnet.

Ligningen $x^2 = 2$ har ingen løsninger i de hele tal eller i de rationale tal. Vi har så *defineret* $\sqrt{2}$ som et nyt tal, nemlig den positive løsning til ligningen. Dette tal er med i den større talmængde af *reelle* tal.

Ligningen $x^2 = -1$ har ingen løsninger i de reelle tal. Vi har så *defineret* $i = \sqrt{-1}$ som et nyt tal, nemlig den ene af to løsninger til ligningen. (Den anden løsning er $-i$). Tallet i kaldes for den *imaginære* enhed. Det er med i en større talmængde end de reelle tal, nemlig de *komplekse* tal. Imaginær betyder indbildt, og var en betegnelse nogle matematikere fandt på for mange hundrede år siden, fordi det var en slags spøgelsestal, der ikke kunne findes på tallinjen. Men de virkede og viste sig uundværlige i mange sammenhænge. Siden fandt man ud af, at man "bare" skulle udvide tallinjen til talplanen, så kunne man afsætte dem.

Definition 10 (Komplekse tal)

De komplekse tal består af alle tal på formen $z = x + y \cdot i$, hvor x og y er reelle tal. Tallet x kaldes den reelle del af z og skrives også $Re(z)$, mens y kaldes imaginærdelen af z og skrives $Im(z)$.

Ved at udvide til de komplekse tal får vi netop den ekstra dimension vi har brug for. Det kan ses ved at plote det komplekse tal $z = x + i \cdot y$ som et punkt i x, y planen, se figur 5.

Det virker måske ulogisk, at der kan findes et tal, som når man ganger det med sig selv giver minus en - men det var også ulogisk for de gamle grækere, at der skulle findes et tal, som ganget med sig selv giver 2. Man kan jo ikke skrive dette tal op, kun angive det som et symbol. I dag tager vi det helt naturligt, at tallene er *udvidet* til de reelle tal. I moderne matematik er det lige så naturligt, at de reelle tal er *udvidet* til de komplekse tal. Mange matematiske problemer kan kun løses i de komplekse tal.

Denne abstraktion er imidlertid ikke kun nyttig i moderne matematik - den er helt uudværlig i den formelle beskrivelse af kvantemekanikken.

10.1 Regning med komplekse tal

Regning med komplekse tal er næsten som at regne med reelle tal, man skal bare huske at $i \cdot i = -1$. For to komplekse tal $z_1 = x_1 + y_1 \cdot i$ og $z_2 = x_2 + y_2 \cdot i$ gælder derfor.

- $z_1 + z_2 = x_1 + x_2 + (y_1 + y_2) \cdot i$
- $z_1 - z_2 = x_1 - x_2 + (y_1 - y_2) \cdot i$
- $z_1 \cdot z_2 = (x_1 + y_1 \cdot i)(x_2 + y_2 \cdot i) = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 \cdot i \cdot i + x_1 \cdot y_2 \cdot i + x_2 \cdot y_1 \cdot i = x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2 + (x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1) \cdot i$

Øvelse 23

For de to komplekse tal $z_1 = 2 + 3i$ og $z_2 = 4 - 2i$ udregn

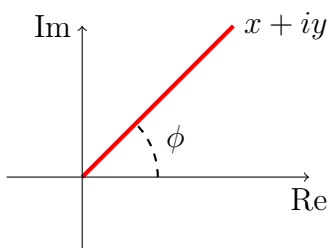
- $z_1 + z_2 =$
- $z_1 - z_2 =$
- $z_1 \cdot z_2 =$

Øvelse 24

For matricer var multiplikation ikke kommutativ.

- *Undersøg om komplekse tal er kommutative ved multiplikation.*

Et komplekst tal kan visualiseres som et punkt i et koordinatsystem, hvor x-aksen er den reelle akse og y-aksen den imaginære akse, se figur 5.



Figur 5: Komplekse talplan

Den reelle del er altså afstanden langs x-aksen, og den imaginære del er afstanden langs y-aksen. Figur 5 viser også en anden måde at skrive komplekse tal på. Hvis vi kender vinklen ϕ (phi) og længden $|z|$, kan vi komme frem til samme punkt. Det svarer til en omskrivning til *polære koordinater*, hvor $x = |z| \cdot \cos \phi$ og $y = |z| \cdot \sin \phi$.

Definition 11 (Polære koordinater for komplekse tal)

Ved *polære koordinater* til det komplekse tal z forstås talparret (r, ϕ) , hvor $r = |z|$ og ϕ er vinklen mellem 1. aksen og stedvektoren til punktet z i den komplekse plan. z kan skrives som

$$z = r \cdot (\cos \phi + \sin \phi \cdot i)$$

Vinklen ϕ kalde *argumentet* for z og r kaldes *modulus* for z .

I kapitlet om *Den komplekse eksponentialfunktion* i *appendiks B* redegør vi for, at dette udtryk også skrives $z = r \cdot e^{i\phi}$. Det er umiddelbart meget underligt, at der fremstår en sådan sammenhæng mellem den naturlige eksponentialfunktion og de trigonometriske funktioner, når vi går over i de komplekse tal, men det giver faktisk rigtig god mening. I kapitlet beviser vi, at den funktion $f(z) = f(x+iy)$, der defineres således: $f(x+iy) = e^{x+iy} = e^x \cdot (\cos y + i \cdot \sin y)$ opfylder potensregnerreglerne, specielt

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$$

En af konsekvenserne heraf er den følgende smukke formel:

Øvelse 25

- Vis at Eulers berømte ligning $e^{i\pi} = -1$ passer.

Længden af z kan findes ved brug af pythagoras sætning $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ eller ved at bruge at $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$, hvor \bar{z} er den komplekst konjungerede.

Definition 12 (Kompleks konjungeret)

Den *kompleks konjungerede* til tallet $z = x + i \cdot y$ er

$$\bar{z} = x - i \cdot y$$

Den imaginære del ændrer fortegn når man komplekst konjungerer.

Sætning 5 (modulus for komplekse tal)

modulus for z kan beregnes som

$$|z|^2 = z \cdot \bar{z}$$

Bevis 2

Vi bruger z i polær form og standard potensregnereregler.

$$z \cdot \bar{z} = e^{i\phi} \cdot r \cdot e^{-i\phi} \cdot r = e^{i\phi-i\phi} \cdot r^2 = r^2$$

Vi kan finde vinklen ved

Sætning 6 (Argumentet af komplekse tal)

Argumentet for z , ϕ kan beregnes ved brug af tangens,

$$\phi = \arg(z) = \arctan \frac{y}{x}$$

Øvelse 26

Omskriv $z = 2 + 3i$ til polære koordinater.

I kapitlet om *komplekse tal* i *appendiks A* viser vi følgende vigtige sætning om multiplikation udtrykt med polære koordinater:

Sætning 7 (Multiplikation i polære koordinater)

To komplekse tal ganges sammen ved at gange deres modulus og addere deres argumenter.

10.2 Kvantebit - Den generelle form og Bloch-sfæren

Med de komplekse tal til rådighed, kan vi opstille den generelle form for en kvantebit. Spinnet af et kvantemekanisk system – som en elektron – kan måles efter en vilkårlig retning i rummet, og en måling efter en akse i 3d vil som i 2d altid give to mulige værdier: op eller ned, th eller tv, + eller –, eller hvad vi nu kalder det. Vi vil bygge videre på den notation og symbolik, vi har indført, og beskrive en kvantetilstand således:

$$|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle \quad (40)$$

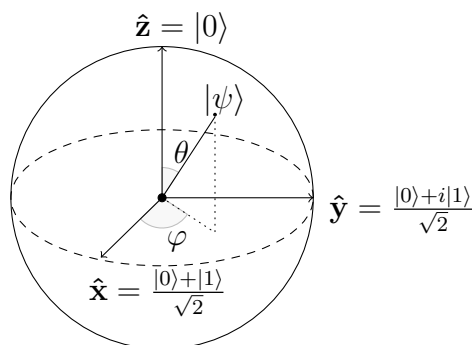
hvor a og b er komplekse tal. Som i tilfældet med reelle tal gælder også her:

$$|a|^2 + |b|^2 = 1 \quad (41)$$

En af vanskelighederne ved at håndtere komplekse tal, der både optræder som uafhængige og afhængige variable, er, at vi har flere variable, end der er "plads til" i det 3 dimensionale koordinatsystem. Derfor er der udviklet en snedig repræsentationsform, den såkaldte Bloch-sfære, der er en enhedskugle, som er sådan indrettet, at et

punkt på sfæren - som er bestemt af to sfæriske koordinater - *entydigt* svarer til en kvantetilstand. Dette er detaljeret gennemgået i kapitlet *Sfærisk geometri og Bloch-sfæren* i *appendiks C*.

Blochsfæren er vist i figur 6, hvor tilstandene $|0\rangle$ ligger langs z-aksen og $|+/-\rangle$ tilstanden ligger langs x-aksen. De *sfæriske koordinater* er θ og ϕ .



Figur 6: Bloch sfære

Vi har nu kun de to sfæriske koordinater, og er tæt på at have fundet en måde at visualisere kvantetilstande. Vi mangler et skridt endnu, før vi har fat i hele billedet. Vi husker, at de to kvantetilstande ”op” og ”ned”, $|0\rangle$, $|1\rangle$ er ortogonale, samtidig med at de peger i hver sin retning. Det er dette, vi ikke kan få beskrevet ordentlig med det traditionelle koordinatsystem, og det som gør anvendelsen af komplekse tal uundværlig. En rotation på $\theta = 180^\circ$ skal sende tilstand $|0\rangle$ over i den *ortogonale* tilstand $|1\rangle$. Det gøres ved at definere den generelle tilstand som,

$$|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle, \quad a = \cos \theta/2, \quad b = \sin \theta/2 \quad (42)$$

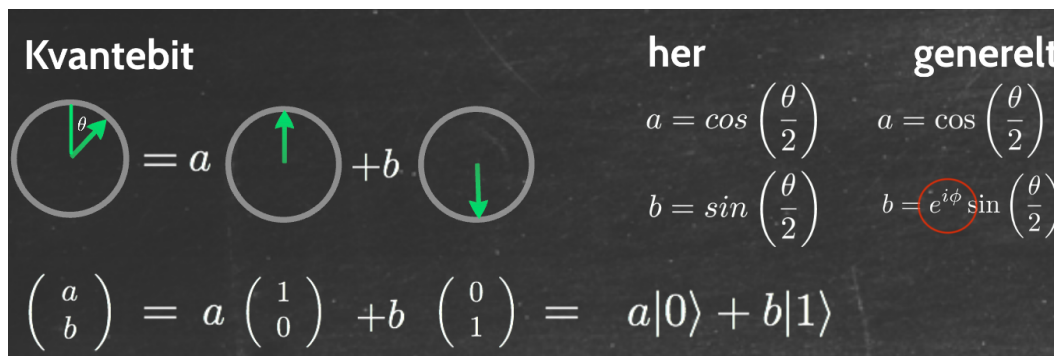
I *appendiks B* beviser vi, at med denne konstruktion gælder det generelt, at to kvantetilstande, der målt efter den samme retningsvektor peger i hver sin modsatte retning, er ortogonale.

Øvelse 27

- *Vis at en rotation på $\theta = 90^\circ$ netop giver $|+\rangle$ kvantiseringen.*

En rotation i xy-planen på bloch-sfæren sker med brug af den komplekse eksponentialfunktion. I *appendiks* vises, at vi kan reducere problemet til kun at gange den komplekse eksponentialfunktion på b , jfr. figur 7.

Vi kan nu dreje vores tilstandsvektor i alle retninger. I praksis har vi oftest kun brug for tilstande langs akserne.



Figur 7: Komplekse del af kvantebit

Øvelse 28

Start med kvantebitten i tilstanden $|0\rangle$ og foretag

- En rotation $\theta = 90^\circ$ og vis, at tilstanden bliver $|0\rangle_x = |+\rangle$.
- Foretag yderligere en rotation $\phi = 90^\circ$ og vis, at tilstanden nu er $|0\rangle_y$, langs y-aksen.
- Foretag yderligere en rotation $\phi = 90^\circ$ og vis, at tilstanden nu er $|1\rangle_x = |-\rangle$, langs minus x-aksen.
- Vis, hvordan man kommer fra tilstanden $|0\rangle$ til tilstanden $|1\rangle_y = \frac{|0\rangle - i|1\rangle}{\sqrt{2}}$.

De nye kvantetilstande parallelt og anti-parallelt med y-aksen kan skrives som.

$$|0\rangle_y = \frac{|0\rangle + i|1\rangle}{\sqrt{2}}, |1\rangle_y = \frac{|0\rangle - i|1\rangle}{\sqrt{2}},$$

Øvelse 29

- Vis, at tilstandene $|0\rangle_y$ og $|1\rangle_y$ er ortogonale.
- Vis, at de hver har længden 1.

Vi har dermed en matematisk repræsentation af kvantiseringen i 3 dimensioner.

10.2.1 Måling

Vi mangler nu kun at se på målinger i det generelle tilfælde. Selvom vi kan definere og regne med komplekse tal, giver de sig aldrig til kende, når vi måler på systemerne. Målinger er klassiske operationer, og de komplekse tal hører til de rene kvantesystemer.

Sætning 8 (Målinger på et kvantesystem giver reelle værdier)

Enhver måling på et kvantesystem giver en reel måleværdi. Sandsynligheden for at finde et kvantesystem i en tilstand er også en reel værdi.

En måling svarer i vores verden til et klik i en detektor. Det er måske ikke så mærkeligt, at denne ikke kan være kompleks, men bare er binær, $\{0, 1\}$. Sandsynligheden for at finde et system i en kvantetilstand beregnes som tidligere vist, som $P(|a\rangle) = |\langle a|\psi\rangle|^2$, altså prikproduktet mellem tilstanden $|\psi\rangle$ og $|a\rangle$. I udregningen af prikprodukter af vektorer med komplekse koordinater skal $\langle a|$ være den komplekst konjugerede af $|a\rangle$. For tilstanden $|0\rangle_y$ bliver den komplekst konjugerede

$$|0\rangle_y = \frac{|0\rangle + i|1\rangle}{\sqrt{2}} \Rightarrow \langle 0|_y = \frac{\langle 0| - i\langle 1|}{\sqrt{2}}$$

Øvelse 30

- Vis, at sandsynligheden for at måle spin up er 50%, når kvantebitten er i tilstanden $|0\rangle_y$.

11 Spillet

Jan Philip Solovej bruger GHZ spillet til at forklare, hvorfor kvanteberegninger kan noget som klassiske beregninger ikke kan. Man kan, som han viser, finde en sikker strategi, så man vinder spillet, hvis man bruger kvantemekanik og aldrig være sikker på at vinde, hvis man ikke gør. Det er selvfølgelig en kunstig situation, men forskere har vist, at en kvantecomputer netop vil kunne klare opgaver og løse problemer, som klassiske computere ikke har nogen chance for at klare. GHZ spillet er også endnu et eksempel på, at Einsteins ide om skjulte variable som forklaring på de mærkelige kvantefænomener ikke kan være rigtig.

11.1 Det klassiske spil

GHZ-spillet er her sat op med en game master, Jokeren, som giver information til Batman, Robin og Supermand. Jokeren kan kun give information ud i form af bits, som enten kan have værdien, 0 eller 1. Spillernes svar er også bits altså, 0 eller 1. Spillet er illustreret i figur 8.

Spilleregler:

- Spillerne vælger hvilken strategi de vil følge, før spillet går i gang.
- Jokeren sender tre bits, 0 eller 1, én til hver af spillerne, $\{x, y, z\}$
- De tre spillere sender uden at tale sammen deres svar tilbage.
- Hvis summen af de tre spilleres svar svarer til den højre kolonne i figur 8, vinder de.

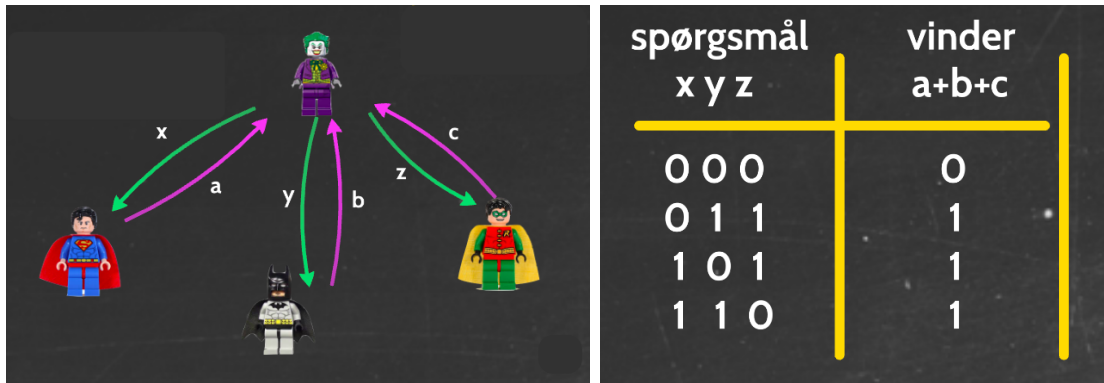
Spillerne må altså gerne tale sammen *før* de får deres spørgsmål, men ikke efter. Man kan skrive strategierne op som funktioner. Funktionen for Supermand hedder her $a(x)$ og en strategi kunne være: $a(0) = 1$ og $a(1) = 0$. Altså: Send det modsatte tilbage. Supermand sender altså 1 tilbage, hvis han modtaget et 0 fra Jokeren og sender 0 tilbage, hvis han modtager et 1.

Øvelse 31

- *Dan strategier og test om du kan vinde spillet.*

Hvis I regner rigtigt, finder I ikke nogen strategi, som giver gevinst hver gang. Det kan vi bevise matematisk. Bits er tal skrevet i total-systemet, med den særlige regneregul, at 2 sættes lig med 0, 3 sættes lig med 1, 4 sættes lig med 0 osv. Sagt på en anden måde: De naturlige tal opdeles i lige og ulige, de lige svarer til 0, de ulige svarer til 1.

Vi har brug for at definere hvad et lige og et ulige tal er:



Figur 8: De tre spillere og Jokeren. Spørgsmålet hver enkelt får står i venstre kolonne, og det svar, som gør at de vinder, står i højre kolonne.

Definition 13 (lige og ulige tal)

Et helt tal z siges at være lige hvis $z = 2 \cdot n$ hvor $n \in \mathbb{Z}$, er et heltal. Et ulige heltal z defineres ved at være lig $z = 2 \cdot n + 1$.

Øvelse 32

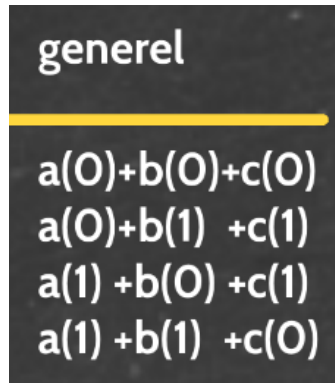
- Brug definitionen til at vise, at 9 er et ulige tal.
- Vis, at 8 er lige.
- Vis, at 0 er lige.
- Vis, at et ulige plus et ulige tal giver et lige.
- Vis, at et lige tal plus et ulige giver et ulige.
- Vis, at lige+ulige+ulige+ulige giver noget ulige.

Hvis vi kigger på kolonnen med resultatet for at vinde, figur 8, er det tallene $\{0, 1, 1, 1\}$ eller tallene $\{\text{lige}, \text{ulige}, \text{ulige}, \text{ulige}\}$. Spillerne skal derfor komme op med ét lige resultat og tre ulige. Summen af resultaterne giver noget ulige som vist i øvelsen ovenfor. Figur 9 viser de mulige strategier. Hvis vi summerer den første søjle, Supermands søjle, så står der $a(0) + a(0) + a(1) + a(1) = 2 \cdot a(0) + 2 \cdot a(1) = 2 \cdot (a(0) + a(1)) \Rightarrow \text{lige tal}$

Øvelse 33

- Vis på samme måde, at de to næste kolonner også giver et lige tal.
- Brug at lige + lige \Rightarrow lige til at vise at svarene fra superheltene summeret giver et lige tal.

Konklusionen er, at summen af superheltenes svar altid giver et lige tal, mens summen af de rigtige svar altid giver et ulige tal. Der er derfor ikke nogen klassisk måde,



Figur 9: Strategierne skrevet som funktioner

superheltene kan vinde spillet på. I denne her simple verden kan vi se, at ingen skjulte variable kan hjælpe vores superhelte.

12 Flere kvantebits

Vi har nu arbejdet med, hvordan man roterer og måler på en enkelt kvantebit. Lige som med en klassisk computer er en enkelt kvantebit ikke så meget værd. I vores eksempel har hver superhelt en kvantebit, og vi skal nu se, hvordan flere kvantebits kan beskrives matematisk.

12.1 EPR og entanglement

Den simpleste to-partikel tilstand, som er interessant er EPR tilstanden, som kan skrives som,

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}} |00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |11\rangle$$

hvor tallenen i ketten, $|\rangle$ viser tilstanden for de to fotoner, $|\text{foton}_1 \text{ foton}_2\rangle$.

Figur 10 viser til højre en lysstråle, som kommer gennem en ikke lineær krystal. Lysstrålen eksiterer atomerne i krystallen og en gang i mellem udsender den to sammenfiltrede partikler, de grønne pile. Ved en måling vil man finde at de to fotoner enten



Figur 10: to kvantebits entangled

er i tilstanden $|00\rangle$ eller tilstanden $|11\rangle$, men aldrig i tilstanden $|10\rangle$ eller $|01\rangle$.

Det betyder at vi har 50% chance for at begge partikler er i tilstand $|0\rangle$, og 50% for at de begge er i tilstand $|1\rangle$. Det er derimod ikke muligt at måle en partikel i tilstand $|0\rangle$ og den anden i tilstanden $|1\rangle$. Disse to fotoner siges at være entangled, eller på dansk sammenfiltrede. Her er nogle facts om de to entangled partikler.

- Hver partikel er tilfældigt spin op eller spin ned.
- Efter en måling af én af partiklerne, er den andens orientering også bestemt.
- Partiklerne kan være langt fra hinanden.
- Effekten optræder instantant, med det samme.

Disse fire punkt strider på mange måder mod den klassiske forståelse af verden. Især at effekten optræder med det samme, lige gyldigt hvor langt partiklerne er fra hinanden, skabte modstand. Det strider umiddelbart mod, at intet signal kan bevæge sig hurtigere end lysets hastighed, hvilket er en af hjørnestenene i Einsteins relativitetsteori. Det viser sig ved en nærmere analyse, at der faktisk ikke bliver sendt information i klassisk forstand så med lidt god vilje er kvantemekanikken og relativitetsteorien ikke på kollisionskurs her.

Man kan forestille sig, at krystallen virkede ved tilfældigt at sende to fotoner med spin op ud og andre gange tilfældigt to fotoner med spin ned. Det vil give de to mulige tilstande

$$|\psi\rangle = |00\rangle, \text{ eller } |\psi\rangle = |11\rangle. \quad (43)$$

Dette vil også give resultatet, at man altid måler det samme på begge fotoner. For at vise, at det ikke er sådan verden hænger sammen, må vi måle i en anden basis. Hvis vi måler en spin op foton langs x-aksen, basen $+/-$, har vi tidligere vist, at resultatet 50% af gangene vil give $+$ og 50% af gangene vil give $-$, helt tilfældigt. Som tidligere vist kan vi måle langs andre akser ved at rotere vores kvantebits.

Det er muligt at rotere hver kvantebit uafhængigt af de andre kvantebit. Vi kan derfor bruge resultatet for rotation af enkelte kvantebits,

$$R(90^\circ) |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \text{ og } R(90^\circ) |1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle). \quad (44)$$

Hvis vi starter i tilstanden $|00\rangle$ og roterer den første kvantebit fra spin op til spin langs x-aksen, bliver tilstanden

$$R_1(90^\circ) |00\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |10\rangle$$

Øvelse 34

- Udregn, hvad en rotation af kvantebit 2 giver, $R_2(90^\circ) |00\rangle =$
- Udregn $R_1(90^\circ) |11\rangle =$

Lad os måle EPR tilstanden i $+/-$ basen, langs x-aksen. Det gøres ved at rotere dem til at ligge langs x-aksen, og så måle i z-basen som vi plejer.

$$R_2(90^\circ) R_1(90^\circ) \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle + |11\rangle) = \quad (45)$$

$$R_2(90^\circ) \frac{1}{2} (|00\rangle + |10\rangle + |11\rangle - |01\rangle) = \quad (46)$$

$$\frac{1}{2\sqrt{2}} (|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle + |11\rangle - |10\rangle - |01\rangle + |00\rangle) = \quad (47)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle + |11\rangle) \quad (48)$$

Øvelse 35

- Hvis vi efter rotation måler første foton i tilstand $|0\rangle$, hvad ved vi så om anden fotons tilstand?
- Hvad sker der, hvis vi måler på foton 2 først?

Det viser sig, at vores EPR qbits er korreleret ligegyldigt hvilken basis, vi vælger at måle dem i. Det er ret specielt. Husk at vi mister al information, hvis vi måler en enkelt qbit i en ortogonal basis, men med to sammenfildrede qbits vil de blive ved med at være korrelerede. Vi kan lave samme rotation med de to ikke-sammenfildrede tilstande, $|\psi\rangle = |00\rangle$, eller $|\psi\rangle = |11\rangle$.

Øvelse 36

- Vis, at $R_2(90^\circ)R_1(90^\circ)\frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle$ giver tilstanden $|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle$.
- Hvis vi nu måler første foton til tilstanden $|0\rangle$, hvad ved vi så om den anden fotons tilstand?
- Beskriv, hvorfor fotonernes spin nu ikke længere er korreleret.

Vi har nu to hypoteser, som vi kan teste i laboratorierne. Den første er, at fotonerne forbliver korrelerede ved rotation og den anden, at korrelationen forsvinder. Det er netop, hvad forskere har undersøgt, og resultatet er entydigt til fordel for den første hypotese.

12.2 GHZ tilstanden

Den maksimalt entangledede trepartikeltilstand er tilskrevet fysikerne Greenberger, Horner og Zeilinger, og ses i figur 11.

Greenberger-Horne-Zeilinger tilstand

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{2}} |000\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |111\rangle$$

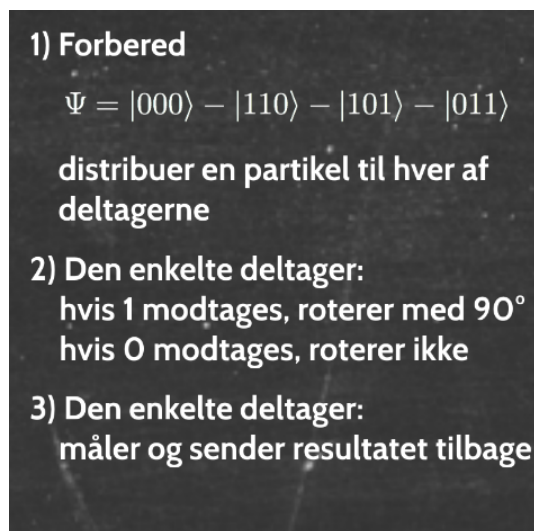
Figur 11: tre kvantebits entangled

Øvelse 37

- Hvad er sandsynligheden for at finde systemet i tilstand $|000\rangle$.
- Hvad måler Batman og Superman, hvis Robin har målt tilstand $|1\rangle$ først.

13 Vinderstrategi

Vi har nu værktøjet til at spille spillet med Jokeren igen, men denne gang kan vi vinde!. For at vinde spillet skal superheltene bruge GHZ tilstanden, ved fornuftige rotationer kan tilstanden i figur 11 omdannes til tilstanden i figur 12. Hver spiller får en entangled qbit hver og følger anvisningerne i figur 12. Før spillet begynder, må de godt tale



Figur 12: Vinderstrategien

sammen, og de laver den fælles tilstand,

$$|\psi\rangle = |000\rangle - |110\rangle - |101\rangle - |011\rangle$$

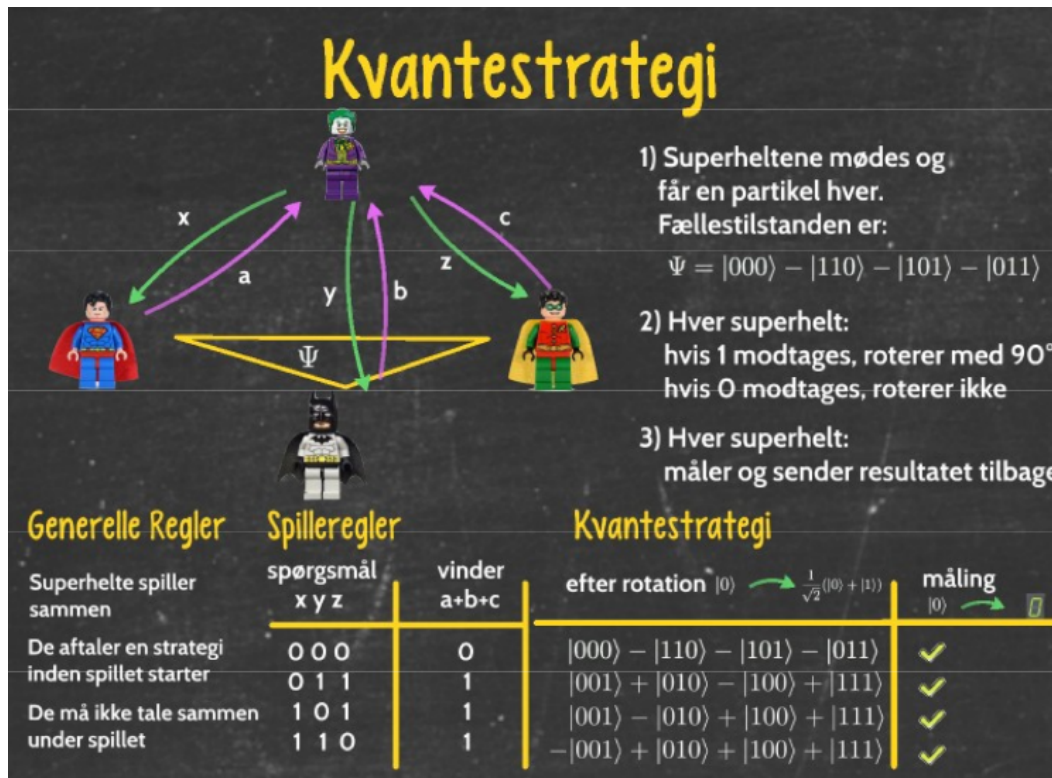
Øvelse 38

tilstanden $|\psi\rangle$ har ikke længden 1, som den skal.

- Hvorfor var det vigtigt, at en tilstandsvektor skal have længden 1?
- Beregn længden af tilstanden ψ .
- Hvilken konstant skal der ganges på for at normere tilstanden?

Spillerne modtager enten tallet 0 eller tallet 1 fra Jokeren. De skal helt individuelt rotere deres kvantebit med 90° , hvis de modtager 1 og intet gøre, hvis de modtager 0.

Til sidst laver hver spiller en måling med resultatet 0 eller 1 og sender det tilbage. Hele spillet er vist i figur 13. Første kolonne er Jokerens spørgsmål, hvor han sender enten 0



Figur 13: Spillet kvantemekanisk

eller 1 og kun i den specifikke rækkefølge. Anden kolonne giver det svar, som spillerne skal komme med, for at vinde.

Tredje kolonne er den svære, så lad os tage den en bid af gangen. I første række, hvor der ikke foretages nogen rotation er resultatet netop et lige tal, 0 eller 2. Husk, at resultatet af en måling er, at systemet enten er i tilstand, $|000\rangle$ eller $|110\rangle$ eller $|101\rangle$ eller $|011\rangle$. Hvis de måler tilstand $|110\rangle$ betyder det, at de måler

$$a = 1, b = 1, c = 0 \Rightarrow a + b + c = 2, \text{ lige tal}$$

Et lige tal er det samme som 0, når vi regner binært.

Øvelse 39

- Undersøg om de andre tilstande i første række også giver resultatet 0 ved måling.
- Undersøg, om de andre rækker giver det ønskede resultat ved måling: 1 eller 3, altså et ulige tal.

Hvis man vil vise, at rotationen faktisk giver tilstandene i 3. kolonne, skal vi holde tungen lige i munden og skaffe os noget papir og en blyant. Det er ikke sværere end tidligere, men meget mere besværligt. Det, vi skal huske, er at

- Foretage én rotation af gangen.
- Bruge, at $R(90^\circ) |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ og $R(90^\circ) |1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$
- Samle alle led og reducere udtrykket.

Vi gennemgår udregningen for linje to, hvor jokeren sender $(0, 1, 1)$ og qbit to og tre skal roteres.

starttilstanden

$$|000\rangle - |110\rangle - |101\rangle - |011\rangle$$

roterer anden kvantetilstand 90 grader.

$$R2(90^\circ)(|000\rangle - |110\rangle - |101\rangle - |011\rangle) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}((|000\rangle + |010\rangle) - (|110\rangle - |100\rangle) - (|101\rangle + |111\rangle) - (|011\rangle - |001\rangle))$$

roterer tredje kvantetilstand med 90 grader.

$$R3(90^\circ)\frac{1}{\sqrt{2}}((|000\rangle + |010\rangle) - (|110\rangle - |100\rangle) - (|101\rangle + |111\rangle) - (|011\rangle - |001\rangle)) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}((|000\rangle + |001\rangle) + (|010\rangle + |011\rangle) - (|110\rangle + |111\rangle) + (|100\rangle + |101\rangle) - (|101\rangle - |100\rangle) - (|111\rangle - |110\rangle) - (|011\rangle - |010\rangle) + (|001\rangle - |000\rangle)) =$$

reduktion giver \Rightarrow

$$|001\rangle + |010\rangle - |100\rangle + |111\rangle$$

Resultatet er netop den ønskede kvantetilstand i række 3. Lad os vise, at resultatet netop bliver 1 ved måling.

$$S_z |001\rangle = 1 + 1 - 1 = 1 \tag{49}$$

$$S_z |010\rangle = 1 - 1 + 1 = 1 \tag{50}$$

$$S_z |100\rangle = -1 + 1 + 1 = 1 \tag{51}$$

$$S_z |111\rangle = 1 + 1 + 1 = 3 = 1 \text{ modulo } 2 \tag{52}$$

Vi har altså vist, at resultatet netop bliver 1 ved måling, og spillerne vinder med denne strategi.

Øvelse 40

- *Vis, at spillerne også vinder med de andre strategier.*

13.1 Opsummering

Vi har vist, at der ikke findes nogen klassisk strategi til at vinde spillet, men at der findes en kvantemekanisk løsning. Dette er et eksempel på, at en kvantetilgang kan løse

et problem som en klassisk tilgang ikke kan klare. Man forestiller sig ikke at en kvantecomputer bliver en generel computer som den klassiske, men at den kan klare nogle bestemte problemer. Peter Shor³ udviklede i 1994 en algoritme til at primtalsfaktorisere, som skalerer polonomielt i forhold til eksponentielt i en klassisk computer. Denne teoretiske mulighed har, sammen med andre kvante-algoritmer, styrket forskningen i kvantecomputeren markant.

GHZ spillet har rødder helt tilbage til den oprindelige diskussion om, hvorvidt den mærkelige opførsel af kvantesystemer skyldtes ukendte skjulte variable. Ved at betragte et så simpelt system som spillet her, har vi vist, at den klassiske mekanik ikke kan være hele svaret. Hvis det var det, kunne man ikke lave kvantemekaniske beregninger og få et bedre resultat end den klassiske løsning. Det forholdsvis simple eksempel hører til en hel gruppe af paradokser fra kvantemekanikkens korte historie, hvor EPR-paradokset og Bells ulighed nok er de mest kendte.

³P. W. Shor, "Algorithms for quantum computation: discrete logarithms and factoring," Proceedings 35th Annual Symposium on Foundations of Computer Science, Santa Fe, NM, USA, 1994, pp. 124-134.

14 No cloning

En anden væsentlig grund til at der er blevet forsket i kvantecomputere, er den mulighed de giver for at foretage fuldstændig fortrolig kommunikation. I dag baserer vi os i grove træk på at det er besværligt at faktorisere store tal. Det bliver så besværligt at selv kraftige computere ikke kan gøre det i overskuelig tid og vores information er derfor sikker. Vi kan ikke matematisk bevise, at der ikke findes en smart måde at primtalsfaktoriserer og en anden udnyttelse af en kvantecomputer er faktisk at gøre netop det hurtigere. Ikke kloningsteoremet i kvantecomputing giver derimod en fundamental sikkerhed ved overførsel af information.

Sætning 9 (no cloning)

En generel kvantemekanisk tilstand kan ikke kopieres.

Beviset foregår som et modstridsbevis. Vi antager at vi godt kan klonen en tilstand og viser at det ikke går godt. Vi benytter os af at alle tilstande for vores qbits kan skrives som en superposition af basistilstandene, $|0\rangle$ og $|1\rangle$.

Beviset foregår som et modstridsbevis. Vi antager at vi godt kan klonen en tilstand og viser at det ikke går godt. Vi benytter os af at alle tilstande for vores qbits kan skrives som en superposition af basistilstandene, $|0\rangle$ og $|1\rangle$. Hvis vi kalder vores kopieringsoperator for W må der gælde,

$$W |0\rangle |0\rangle = |0\rangle |0\rangle \quad (53)$$

$$W |1\rangle |0\rangle = |1\rangle |1\rangle. \quad (54)$$

Vi kopierer tilstanden fra den første qbit til den anden. Hvis vi prøver at kopiere en superposition får vi,

$$W |+\rangle |0\rangle = W \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} W(|0\rangle |0\rangle + |1\rangle |0\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle |0\rangle + |1\rangle |1\rangle), \quad (55)$$

hvor vi har brugt resultatet fra ligning 53 i sidste lighedstegn.

Det kan vi sammenligne med det resultat vi gerne skulle få ud af kloningen,

$$W |+\rangle |0\rangle = |+\rangle |+\rangle = \frac{1}{2}(|0\rangle + |1\rangle)(|0\rangle + |1\rangle) = \frac{1}{2}(|0\rangle |0\rangle + |0\rangle |1\rangle + |1\rangle |0\rangle + |1\rangle |1\rangle) \quad (56)$$

Det ses, at de to resultater ikke er de samme. Vi har derfor bevist, at vi ikke kan klonen vore superpositionstilstand, med W . Eftersom det eneste vi har krævet af W operatoren er, at den kloner de simple kvantetilstande, $|0\rangle$ og $|1\rangle$ korrekt, har vi derfor vist, at det ikke er muligt at klonen en generel kvantetilstand.

I starten beskrev vi, hvordan Heisenbergs Usikkerhedsrelation, sætning 1, satte en grænse på hvor lille usikkerheden kan være på positionen og bevægelsesmængden af en partikel. Hvis det er muligt at klonen en kvantetilstand vil det også være muligt at måle positionen på den ene og bevægelsesmængden på den anden. No cloning sætningen har kan derfor begrundes med den fundamentale usikkerhedsrelation.

14.1 Kommunikation mellem Alice og Bob

Hvis kvantemekaniske tilstande kan klones giver det mulighed for at sende information hurtigere end lysets hastighed.

Alice og Bob har delt en tilstand, der er i en superposition af basistilstandene. De har på forhånd aftalt, at hvis Alice måler på, om tilstanden har spin op eller spin ned (dvs måler vertikalt), så sender hun beskeden: 0. Hvis hun måler på, om tilstanden er højre eller venstre (dvs. måler horisontalt), så sender hun beskeden 1. Og de har aftalt hun måler 1. maj kl 12. Det er selvfølgelig en lidt beskeden kommunikation, men måske betyder 1: Ja til Bobs frieri, 0 betyder: Nej. Så det er lidt vigtig for Bob at finde ud af, om hun målte vertikalt eller horisontalt.

Bob måler hele tiden selv i vertikal retning. Hvis Alice har målt spin op, og Bob derefter måler på sin partikel, så får han spin ned. Men hvis Alice har målt horisontalt og fået + (højre), så vil Bob ved en vertikal måling få spin op i 50 pct. af tilfældene og spin ned i 50 pct af tilfældene. Han får fx spin ned. Men hvis man sidder i Bobs stol, hvordan skal han så vide noget som helst om Alices svar?

Bob gør nu det, at han kopierer tilstanden *efter*, at Alice har målt kl 12, men *før*, han selv måler. Hvis Alice havde sendt et 0, dvs målt vertikalt (og fået spin op), så vil Bob måle spin ned *for alle sine kopierede tilstande*. Hvis Alice havde sendt et 1-tal (dvs målt horisontalt), så vil Bobs vertikale måling give *spin op i 50 pct af tilfældene og spin ned i 50 pct af tilfældene*. Altså en markant forskel! Og denne information ville Bob have øjeblikkeligt. Dvs. der er overført information hurtigere end lysets hastighed. Det er i modstrid med fysikkens love.

Nu er det sandsynligheder, så kunne det ikke tænkes, at Bob *tilfældigt* målte det samme i alle 100 tilfælde? Jo. Men sandsynligheden ville være mindre end 10^{-30} . Så det kan vi godt udelukke.

14.2 Sikker kommunikation

Sikkerheden i kvantemekanisk kommunikation ligger i, at kvantetilstandene ikke kan klones. Når information er sendt, findes det kun på den ene måde. Det er derfor ikke

muligt at kopiere informationen så man selv kan se den og sende en kopi videre til en intetanende modtager. Bennett og Brassard udviklede i 84 en protokol hvor det kan bevises, at den er sikker, kalder BB84⁴.

Finten er, at hvis en slem person - der altid kaldes Eve for Eavesdropper - opfanger informationen, kan hun ikke kopiere den. Hvis information sendes som fotoner, og Eve opfanger dem, bliver hun nødt til at måle på dem, hun kan ikke sende en klon videre og måle på den ene af dem. Vores første antagelse 1 siger at systemet så vil være i en egentilstand. Hvis fotonen eks. var i en superposition af spin op og spin ned, vil den efter målingen være i en af dem. Eve kan derfor ikke sende superpositionen videre, og Alice og Bob, dem som gerne vil have overført en hemmelig information, kan se at nogen har ændret på systemet.

⁴ C. H. Bennett and G. Brassard. "Quantum cryptography: Public key distribution and coin tossing". In Proceedings of IEEE International Conference on Computers, Systems and Signal Processing, volume 175, page 8. New York, 1984.

15 Kvantecomputer

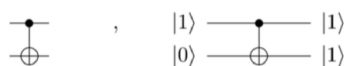
Kvantecomputeren er her, men ikke i en form hvor almindelige mennesker kan købe en. Det kræver stadig et laboratorium og højt specialiserede forskere at få kvantecomputerne til at køre. Det skyldes blandt andet, at en kvantebit skal holdes på en temperatur lige over det absolutte nulpunkt, -273°C for at sikre, at termiske fluktuationer ikke skal ødelægge kvantetilstandene. Det er universiteter og store virksomheder som Google og IBM og det amerikanske militær, som har mulighed for at køre en kvantecomputer. Der er flere firmaer som stiller sine kvantecomputere til rådighed for offentligheden, hvor man kan booke tid til sine eksperimenter. IBM har udviklet et browserbaseret interface, hvorigennem man kan eksperimenterer med deres kvantecomputer. Hvis man skaber en unik algoritme, kan man få lov til at køre den, og hvis algoritmen er prøvet før, kan man vælge at se det tidligere resultat.

For at visualisere de kvantemekaniske beregninger danner vi et kvantekredsløbsdiagram. Det læses fra venstre mod højre og de enkelte kvantebitoperationer forløber på en vandret streng. Figur 14 viser hvordan kvantetilstanden $|0\rangle$ bliver til $|+\rangle$ ved en hadamard gate.

$$\boxed{H} \quad , \quad |0\rangle \xrightarrow{\boxed{H}} |+\rangle$$

Figur 14: Hadamard kredsløbsdiagram

Hvis vi har flere kvantebits, bruger vi flere strenge. Et eksempel på en flerbit operation er CNOT, hvor tilstanden af kvantebit to skifter, hvis kvantebit et er i tilstanden $|1\rangle$. Diagrammet ses i figur 15, hvor kvantebit 2 skifter, fordi kvantebit 1 er i tilstand $|1\rangle$. En



Figur 15: CNOT diagram

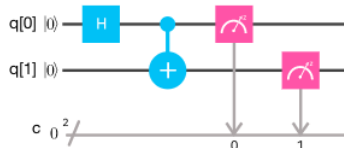
måling foretages hos IBM i $|0/1\rangle$ basen, langs z-aksen, med symbol som et speedometer.

15.1 IBM quantum experience

Vi vil nu skabe nogle af tilstandene og resultaterne fra de forgående kapitler på IBM's quantum experience, [quantumexperience](#). Siden har en glimrende introduktion, både til den fysiske kvantecomputer og til kvanteberegninger. Alle vores kvantebit er i tilstand $|0\rangle$ fra start og for at lave om på tilstandene eller måle dem, trækker vi ikoner ind.

Udgangspunktet er at begge kvantebit, kaldet $q[0]$ og $q[1]$, er i tilstand $|0\rangle$.

Lad os skabe en sammenfiltret tilstand i IBM's kvantecomputer.



Figur 16: Opsætningen i computeren. Øverste linje er kvantebit0 og den næstøverste er kvantebit1.

En Hadamard rotation, H roterer kvantebit $q[0]$ til tilstanden $|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$, altså superpositionen. Ved hjælp af en CNOT gate bliver kvantebit $q[1]$ derefter roteret, hvis kvantebit $q[0]$ er i tilstand $|1\rangle$ og ellers ikke. Da kvantebit $q[0]$ er i en superposition, bliver denne superposition overført på kvantebit $q[1]$. Begge kvantebits kan nu betragtes som værende i tilstand $|0\rangle$ og $|1\rangle$. Hvis vi måler dem hver for sig, får vi at udfaldet enten er $|0\rangle$ eller $|1\rangle$ helt tilfældigt, men figur 17 viser noget overraskende.



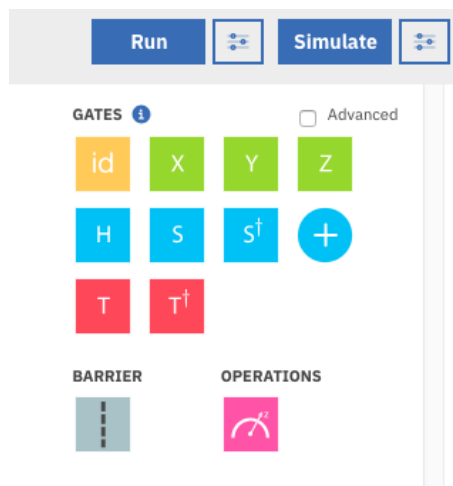
Figur 17: Resultatet af at generere entangled states 100 gange.

Resultatet ses i figur 17, hvor tilstandene $|00\rangle$ og $|11\rangle$, hver næsten har 50% sandsynlighed, mens de andre ikke har nogen. Selvom hver enkelt kvantebit er tilfældig, bliver den altid fulgt af samme resultat fra den anden kvantebit. Vi observerer med andre ord aldrig tilstanden, $|10\rangle$ eller $|01\rangle$, hvor kvantebittene er i hver sin tilstande. Dette er en maksimalt sammenfiltret kvantemekanisk tilstand af to partikler.


Forsøget er kørt 100 gange, og hver gang er den eneste oplysning man har fået, at enten var kvantebit $q[0]$ i tilstand $|0\rangle$ eller i tilstand $|1\rangle$ ved måling. Sandsynligheden er ikke præcis 50%, hvilket skyldes, at der er usikkerhed i målingerne på selve kvantecomputeren. Denne usikkerhed går - som ved normal tællestatistik - som kvadratroden af antallet af tællinger.

En oversigt over de simpleste kvante-gates kan ses i figur 18.

X, Y, Z gatene svarer til rotation om de forskellige akser, hvor vi igen befinder os i Bloch-sfæren, beskrevet i afsnit 10.2. En X -gate skal derfor forstås som en 180° rotation omkring x -aksen. Hvis den foretages på starttilstanden $|0\rangle$, hvor kvantiseringen er op



Figur 18: Simple kvantegates til programmering. Ved Run knappen køres på den rigtige kvantecomputer, ved Simulate bruges en normal computer. I'et i den blå cirkel giver en hurtig oversigt over egenskaberne.

langs z-aksen, vil en X -gate medføre tilstanden $|1\rangle$, pegende i minus z-retningen. En forklaring på de forskellige gates kan findes under .

Den bedste måde at få styr på programmet er at ved at afprøve simple eksempler.

15.2 Enkelt kvantebit

Øvelse 41

- Lav en måling af starttilstanden.
- Lav en måling efter X, Y, H gaten, hver for sig. Hvordan fortolker du resultatet?
- Prøv at følge ændringen i kvantetilstanden på Bloch-sfæren, 20.

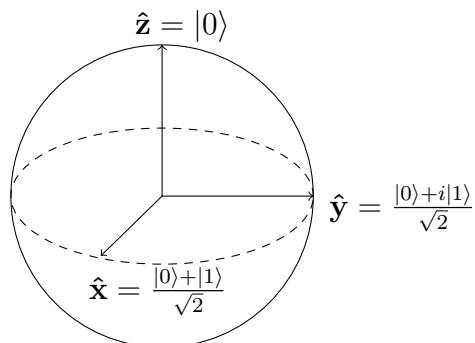
Det er kun muligt at måle langs z-aksen. Hvis vi vil måle om kvantetilstanden er $|+\rangle$ eller $|-\rangle$, altså langs x-aksen eller modsat retning, må vi først rotere denne tilstand til z-aksen. Det gøres ved en Hadamard gate, $H : x \rightarrow z$, eller $-x \rightarrow -z$. Figur 19 viser kredsløbet for at generere $|-\rangle$, tilstanden og måle den i 0/1 basen.



Figur 19: Den grønne boks $z \rightarrow -x$. Den røde er en måling af kvantiseringen langs x-aksen ved en Hadamard gate.

Øvelse 42

- Lav kredsløbet om, så I genererer og måler tilstanden $|+\rangle$ langs x -aksen.
- Gør det samme for kvantiseringer langs y -aksen, målt langs y -aksen.



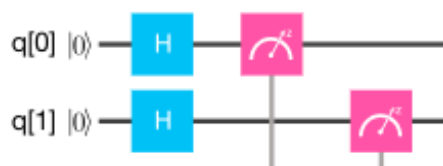
Figur 20: Blochsfære

Øvelse 43

- Prøv at ændre på antallet af forsøg, shots. Det gøres til højre for simuler-knappen.

15.3 flere kvantebits

Vi vender tilbage til eksemplet i starten af dette afsnit, hvor vi så på to kvantebits, som blev sammenfiltret. I stedet for kredsløbet i figur 16 kan vi prøve at bruge en Hadamard gate på hver af de to kvantetilstande, se kredsløbsdiagram 21.



Figur 21: Hadamard gate på hver kvantetilstand.

Øvelse 44

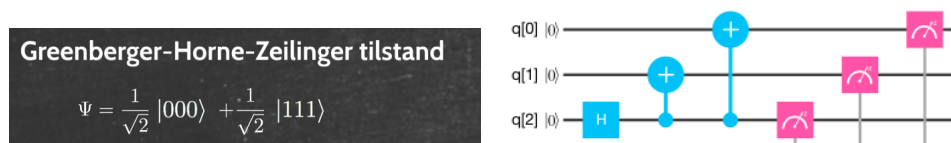
- Kør en simulering med kredsløbet i figur 21 og beskriv resultatet.
- Sammenlign med resultatet fra figur 17, hvor de to partikler er sammenfiltret.
- Hvordan kan man bruge disse to eksempler til at beskrive sammenfiltrering.
- Prøv at måle i x -basen som i øvelsen ovenfor ved at sætte en Hadamard gate før målingen. Hvad er resultatet?

- Gør det samme for kredsløbet i figur 16. Gør det nogen forskel, hvilken basis du anvender til at måle sammenfiltringen?

Sidste resultat, at sammenfiltrede kvantetilstande også er sammenfiltrede, hvis man måler i en vilkårlig basis, er et fundamentalt resultat for kvantesystemer. Det betyder, at de to kvantebits er stærkere korrelerede end klassisk bits. Selv om vi mister al information om den oprindelige kvantisering af en enkelt bit, så gælder det, at hvis vi måler i en ortogonal basis, forbliver denne bit korreleret med den anden bit og resultatet er præcist det samme, hvis den anden også måles i samme ortogonale basis.

15.3.1 GHZ tilstanden

GHZ tilstanden er igen vist i figur 22 sammen med kredsløbsdiagrammet. Med disse tre



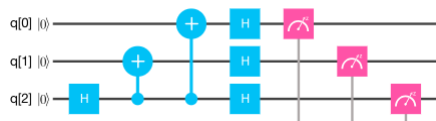
Figur 22: GHZ tilstanden og kredsløbsdiagrammet til at skabe det.

maksimalt sammenfiltrede tilstande kan vi nu vise, at det også på kvantecomputeren er muligt at vinde spillet. Vi vil gøre det med en lidt anden strategi, end den vi brugte til at vise det i afsnit 13. Formålet er stadig at svare korrekt på Jokerens spørgsmål, vist igen i figur 23.

spørgsmål			vinder
x	y	z	a+b+c
0	0	0	0
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	0	1

Figur 23: Spillet.

Med den delte GHZ tilstand vælger de tre spillere at måle langs x-aksen, hvis de får et 0 og langs y-aksen, hvis de får et 1 fra Jokeren. Måling langs x-aksen sker ved at indsætte en Hadamard gate lige før målingen, se figur 24.



Figur 24: Måling hvis Jokeren sender $\{0, 0, 0\}$

Det giver netop den tilstand som spillerne starter med i det teoretiske afsnit. Bemærk, at når I kører simuleringen kommer der ikke minus som i tilstandene figur 13. Det giver stadig enten et lige eller ulige tal, hvis man lægger resultaterne sammen og dermed samme udfald.

Lad os prøve næste række i figur 23, hvor Jokeren sender $\{0, 1, 1\}$. Vi skal derfor måle kvantebit 2 og 3 langs y-aksen. Det kan vi gøre ved at indsætte:



hvor S^\dagger roterer fra $y \rightarrow x$ og H igen roterer $x \rightarrow z$. Kredsløbsdiagrammet kan ses i figur 25a

Resultatet er ved summering et ulige resultat, altså en vinder.

Øvelse 45

- Foretag selv kodningen af de sidste to rækker i figur 23 og overbevis jer om, at spillerne vil vinde spillet.

15.4 Resultater af kvantesimulering

Nedenfor er resultatet af et spil hvor Jokeren har sendt $\{0, 1, 1\}$ for forskellige gentagelser af simuleringen.

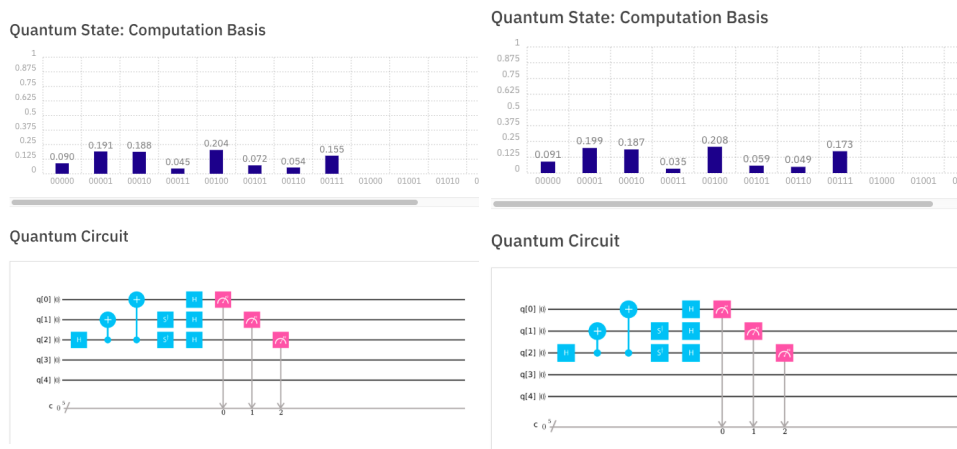
Vi viste, at spillerne matematisk kan vinde spille hver gang, hvis de bruger kvantemekanikken. I virkeligheden kan I se, at resultaterne er mere mudrede.

Øvelse 46

- Beregn sandsynligheden for at give det korrekte svar i to realiseringer af spillet.
- Overvej om der er en klassisk strategi, hvor spillerne vil vinde lige så ofte som den kvantemekaniske.

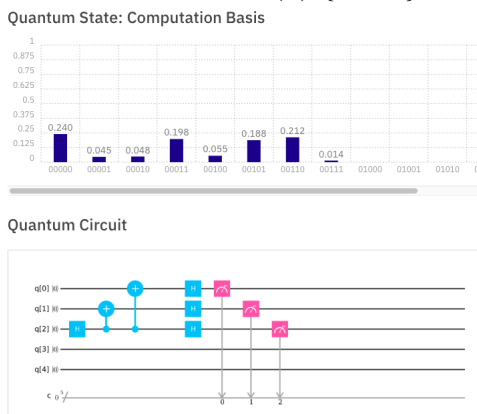
Vi har vist, at det i praksis er svært at vinde spillet med den kvantecomputer, vi har til rådighed. Det viser, at kvantecomputeren stadig er på et tidligt udviklingsstadium. Matematisk kan vi vise en lang række interessante og brugbare kvanteberegninger, som vil ændre vores forståelse af beregninger og potentielt kan ændre væsentlige dele af vores

samfund. I praksis er kvantecomputeren stor og besværlig og ikke særligt pålidelig. Med de ressourcer, der nu investeres i udviklingen, kan det komme til at gå rigtigt stærkt, og de næste år byder helt sikkert på en spændende teknologisk udvikling.



(a) $\{0, 1, 1\}$ med 1024 gentagelse.

(b) $\{0, 1, 1\}$ med 8192 gentagelse.



(c) $\{0, 0, 0\}$ med 8192 gentagelse.

Figur 25: realisationer af kvanteberegninger.

Appendiks 1. Komplekse tal

Mærkelige tal? – Ja, men ikke så anderledes endda

I dette kapitel vises, hvorledes talsystemet er udviklet fra de naturlige tal til de komplekse tal mhp at løse stadigt mere udfordrende problemer. Hvis man udelukkende ønsker en indføring i de komplekse tal, så gå direkte til afsnit 4.2 og læs derfra.

Naturens store bog ligger opslået foran os, men vi kan ikke læse i den, hvis vi ikke først lærer det sprog, den er skrevet i. Og det sprog er matematikkens sprog. Sådan skrev Galilei, den mest indflydelsesrige person i det naturvidenskabelige gennembrud, der tog sin begyndelse først i 1600-tallet. Med ham kom eksperimentet ind i naturvidenskaberne, både de rigtige eksperimenter og tankeeksperimenterne. Galilei lever før Newton og Leibniz, der i sidste halvdel af 1600-tallet udvikler de grundlæggende tanker og metoder i *differential- og integralregningen*. Han lever før Descartes, der midt i 1600-tallet udformer de første versioner af det moderne *koordinatsystem*. Han skriver det citerede 50 år efter, at *lighedstegnet* er opfundet af en engelsk matematiker Recorde, og få årtier efter, at en fransk matematiker, Viète som den første har indført bogstaver som X til at betegne ukendte størrelser og anvendt dette i opstilling af ligninger.

Alligevel skriver Galilei, at *bogstaverne i matematikken sprog er tal og symboler*. Matematikkens sprog er udviklet dramatisk siden, ikke mindst med inspiration fra fysikken og de love og sammenhænge, der her er afdækket. Vi vil her fokusere på udviklingen af tallene, fra det mest enkle til de mærkelige irrationale tal, og til de flerdimensionelle tal som vektorer, komplekse tal og kvaternioner. Ved hjælp af disse tal kan vi udtrykke fysikkens love, både i klassisk mekanik og i kvantemekanik i en overskuelig form. Det er ikke let, men uden matematikken gik det sket ikke.

1. Naturlige tal, negative tal og rationale tal

Tallene, som vi tæller med, kaldes **de naturlige tal**: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$, hvor prikkerne betyder, at listen fortsætter i det uendelige. De kaldes naturlige, fordi de findes i naturen: Der lå 23 æbler på jorden, der er 5248 træer i den lille skov, der bor 1.387.560.052 mennesker i Kina. Selv om det er svært at finde eksempler, når tallene bliver større end antallet af partikler i universet, kan man godt se ideen: Tallene repræsenterer ”noget derude”. De naturlige tal som tælleter kan man finde repræsenteret med hak i knogler der er 30.000 år gamle.

Alle andre tal er menneskeskabte. *Brøkerne* opfindes i det gamle Ægypten, hvor man har brug for et system, der kan håndtere ”lønudbetalinger”, hvor de to grundlæggende enheder var brød og øl i bestemte mål. Man skulle kunne notere fx tre et kvart brød og kunne omregne mellem de to enheder. Når man deler et brød i kvarte og hælder et halvt krus øl op, så repræsenterer brøkerne også ”noget derude”.

Derimod findes der hverken nul eller negative antal i naturen, derfor kommer de på banen langt senere i historien. De negative tal og tallet 0 er uundværlige når man har en økonomi, der kræver et bogholderi, som fx da bankerne opstår. *Negative tal* optræder første gang som almindelige tal, der var farvet røde - det var i regnskabsbøger i Norditalien i 13-1400-tallet.

Brøker kan skrives som *decimaltal*: $\frac{1}{4} = 0,25$ og $\frac{1}{7} = 0,142857142857\dots = 0,\overline{142857}$, hvor stregen angiver,

at de 6 tal 142857, som kaldes perioden, gentages i rækkefølge i det uendelige. Brøker kan skrives som *endelige decimaltal* eller uendelige, men *periodiske decimaltal*. Det fandt man ud af i 1500-tallet.

Decimaltal blev opfundet for at gøre det lettere at regne for almindelige mennesker.

Øvelse. Sammenligning af brøkgregning og regning med decimaltal.

- a) Omskriv i hånden følgende tal til decimaltal: $\frac{1}{8}, \frac{1}{1000}, \frac{1}{6}$
- b) Bestem med brug af et værktøjsprogram $\frac{1}{13}$ med 20 cifre. Hvad er perioden? Kan du argumentere for din påstand?
- c) Svar på følgende uden at regne: Hvad er den maksimale længde af perioden for decimaludgaven af $\frac{1}{17}$?
- d) Kan du stille følgende tal i rækkefølge med den mindste først og største sidst: $\frac{29}{37}, \frac{13}{17}, \frac{18}{23}$? Har du en metode, hvis du ikke må omregne til decimaltal? Svar på spørgsmålet, når du godt må omregne.
- e) Kender du en metode til at udregne $\frac{29}{37} + \frac{13}{17} + \frac{18}{23}$ uden brug af værktøj?
- f) Løs samme opgave, hvor du skriver tallene som decimaltal, og dernæst regner færdig i hånden.

Før den hollandske matematiker i 1585 introducerede decimaltal – og faktisk som en regnemetode til at undgå brøkgregning – var det et universitetsstudium at lære at gange og dividere store tal. Med decimaltallene fik man pludselig håndterbare algoritmer. Vi vil ikke gå dybere ind i dette, men blot lægge som en øvelse at argumentere for det modsatte: Alle decimaltal, der er endelige eller periodiske kan omskrives til brøker

Øvelse

- a) Omskriv tallet 0,257 til en brøk (med hele tal).
- b) omskriv tallet $0,\overline{25}$ til en brøk (med hele tal).
- (Hint. Kald tallet for x . Bestem $100x$, og udregn dernæst $100x - x$. Isolér så til sidst x .)

Når man tænker på tal som redskaber til at beskrive – og bedre forstå - naturen, så tilførte decimaltallene ikke i sig selv noget nyt. Men opskrivningen af de to typer har den umiddelbare konsekvens, at der åbenbart er flere tal, andre slags tal, hvor decimaludviklingen ikke har nogen periode. Det er tal som $\sqrt{2}$ og π , der kaldes for *irrationale tal*. Når man har indført geometri, så er de to nævnte tal lette at forstå. $\sqrt{2}$ er længden af diagonalen i et kvadrat med sidelængde 1. Og π er forholdet mellem længden af omkredsen og længden af diameteren i en vilkårlig cirkel.

Men her er der behov for at være lidt kritisk, for hvad har vi egentlig forklaret med de formuleringer. Hvordan skulle vi måle *længden* af diameteren, for ikke at tale om den krumme cirkelbues længde? Længder måles ved hjælp af en *længdeenhed*. Uanset hvor lille denne enhed er – det kunne fx være bælge-længden for en bestemt elementarpartikel – så ville de angivne længder ikke svare til et helt antal af denne længdeenhed. Hvis vi prøver at lave en procedure, til at beregne længden af en cirkelbue, vil vi hurtigt opdage, at proceduren aldrig når til vejs ende. I 2016 nåede man op på at kende π med 22.459.157.718.361 decimaler. Men det er jo ikke π , det er en tilnærmelse til π .

2. Konstruktion af de reelle tal

For ethvert praktisk formål er tilnærmede tal tilstrækkeligt. Selv om vi i et værktøjsprogram skriver $\sqrt{2}$ og π ind i en formel, så er det ikke de tal, det er tilnærmede tal. Dvs alle værktøjsprogrammer regner kun med rationale tal. Vi kan ikke andet. Men i mange af fysikkens love, både i den klassiske og i kvantemekanikken, indgår kvadratrødder, π og e og andre irrationale tal, fordi naturlove udtrykker noget eksakt, ikke bare noget tilnærmet. Så selv om vi ikke kan få rigtigt hold om de irrationale tal, så opfinder vi symboler for dem,

og påstår de findes. For naturlovene er ikke tilnærmede, men formulerer noget præcist. Tallet π indgår således i formuleringen af de grundlæggende relationer i kvantemekanikken, som Jan Philip Solovej præsenterer i filmen.

Til almindelige tilnærmede beregninger, kunne vi kunne godt klare os uden symboler for de irrationale tal, men det ville betyde at formler, som udtrykkes smukt og enkelt med brug af de irrationale tal – som fx at rumfanget af en kugle med radius r er $\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$ – ville få en formulering, hvor vi er usikker på den fejl vi laver. Og det ville være svært at blive enige om hvilken konstant, der skulle bruges, så formlerne ville være lidt forskellige.

Øvelse

Hvis vi fx bruger $\frac{22}{7}$ i stedet for π , hvor stor er fejlen da?

Vi kan ikke bevise, at tal som π findes, så i matematik indfører vi de irrationale tal som et *aksiom*: Vi påstår de findes! Det gælder også tal som $\sqrt{2}$. Man kunne måske tro, at dette tal kunne defineres som den positive løsning til ligningen $x^2 = 2$. Men hvorfra ved vi, at denne ligning har en løsning? Hvis svaret er, at det ved vi, fordi vi kan gøre prøve ved at indsætte $\sqrt{2}$, og se at ligningen stemmer, så er det et cirkelargument, hvor vi bruger definitionen på $\sqrt{2}$ til at bevise at tallet findes.

I stedet er situationen den, at vi med *rationale* tal kan komme vilkårlig tæt på en løsning til ligningen $x^2 = 2$ men aldrig finde den helt eksakt. Vi kan nemlig finde en følge af rationale tal, v_1, v_2, v_3, \dots hvis kvadrater alle er mindre end 2, og en anden følge af rationale tal h_1, h_2, h_3, \dots hvis kvadrater alle er større end 2, således at forskellen $h_i - v_i$ kan blive så lille vi ønsker det. På tallinjen ligger alle tal v_i til venstre for alle tal h_i . Vores *aksiom om de reelle tal* siger så at mellem følgen af rationale tal, v_1, v_2, v_3, \dots og følgen af rationale tal h_1, h_2, h_3, \dots ligger der et tal. Dette tal betegnes i dette konkrete eksempel $\sqrt{2}$, og det er et irrationalt tal.

Axiom: De reelle tal

Lad $[v_1, h_1], [v_2, h_2], [v_3, h_3], \dots$ være en uendelige følge af intervaller, hvor endepunkterne er rationale tal.

Hvis intervallerne ligger inde i hinanden således:

$$[v_1, h_1] \supset [v_2, h_2] \supset [v_3, h_3] \supset \dots$$

og hvis intervallerne længde går mod 0: $|h_n - v_n| \rightarrow 0$ når $n \rightarrow \infty$, så bestemmer vi, at der på bunden af en sådan *intervalruse* altid ligger et reelt tal.

Da intervallængden går mod 0, kan der i sagens natur kun ligge ét tal på bunden.

Bemærkning: Symbolet \supset læses "indeholder" og fortæller, at fx $[v_3, h_3]$ ligger helt inden i $[v_2, h_2]$.

Intervallerne $[3;4]$ ligger fx helt inden i intervallet $[2,5; 4,5]$.

Der er uendeligt mange flere irrationale tal end rationale tal. Der er faktisk så mange, at peger vi på et tilfældigt sted på tallinjen, så er sandsynligheden for at vi peger på et irrationalt tal lig med 100%! Sandsynligheden for at vi ved et tilfældigt valg af to punkter får en afstand mellem dem, der er et rationalt tal er lig med 0%!

Hvis vi derimod selv vælger en afstand, fx længden af en side i en trekant eller længden af snoren i et pendul, så vil vi næsten altid arbejde med rationale tal. Men sammenhængen mellem svingningstiden for et matematisk pendul og længden af pendulsnoren er et godt eksempel på, at de irrationale tal "styrer":

Hvis T angiver svingningstiden (i sek.), og L angiver længden af pendulsnoren (i m), så gælder der:

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{L}{g}},$$

hvor g også er et irrationalt tal, nemlig tyngdeaccelerationen det sted pendulet er ophængt. g er omtrent $9,82 \text{ m/s}^2$. Så selv om vi selv vælger et af tallene T og L som et pænt rationalt eller endda helt tal, så bliver det andet af de to tal et irrationalt tal.

Øvelse

- Et pendul har en svingningstid på 1,8 sekunder. Hvor lang er pendulsnoren
- Et pendulsnor har længden 10 meter. Hvor lang er svingningstiden?

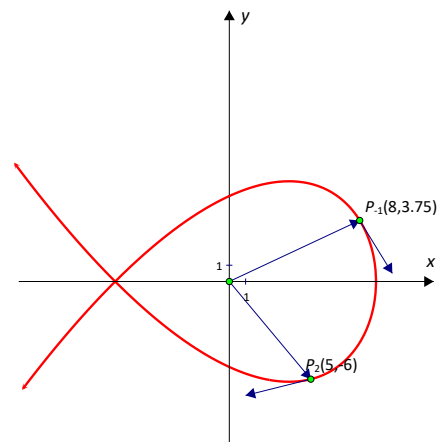
3. Vektorer

Når vi skal angive hvor hurtigt en bil kører, så kan vi svare: "Farten var 112 km i timen". *Farten* angiver et reelt tal. Men er der tale om partiklers bevægelse, vil vi ofte være interesseret i mere end blot et tal – vi vil også gerne kende retningen.

I stedet for at dele svaret op i to – et tal og en retning – så anvender vi *vektorer*, der kan betragtes som to-, eller tredimensionelle tal, afhængig af om vi undersøger bevægelser i en plan eller i rummet. En

hastighedsvektor repræsenteres som en pil, der angiver retningen, og hvor længden af pilen angiver farten.

Men kan vi gå helt over til at beskrive bevægelser i den klassiske mekanik ved hjælp af vektorer. Hvad med partiklen selv? Partiklens bevægelse i et vist tidsrum tegner en kurve, og lader vi partiklen blive repræsenteret af dens *stedvektor*, så tegnes kurven op af endepunkterne for stedvektorerne.



Foregår en plan bevægelse i et 2D-koordinatsystem, som vi har indlagt, så kan en vektor også repræsenteres ved sine koordinater. Vi arbejder normalt med *retvinklede koordinater* (der også kaldes cartesiske koordinater). Er partiklen til tiden t i punktet P_t , og kalder vi koordinatsystemets begyndelse (Origo) for O , så kan kurven, punktet følger, beskrives som bane kurve for en *vektorfunktion*:

$$\vec{r}(t) = \overrightarrow{OP_t} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

Når vi arbejder med reelle tal og tegner grafiske repræsentationer af hvordan en bestemt størrelse – som befolkningstallet – udvikler sig med tiden, så får vi den *hastighed*, hvormed ændringen sker, ved at differentiere den reelle funktion.

Sådan også i de todimensionelle tals, vektorernes verden. Hastighedsvektoren fås ved at differentiere:

$$\vec{v}(t) = \vec{r}'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$$

Øvelse

En cirkelbevægelse i en cirkel med radius 5 kan beskrives ved vektorfunktionen:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 5\cos(t) \\ 5\sin(t) \end{pmatrix}$$

- a) Tegn grafen
- b) Bestem hastighedsvektoren. (Slå evt op, hvordan man differentierer cosinus og sinus)
- c) Afsæt hastighedsvektoren i $P=(5,0)$ og i $Q=(0,5)$. Beskriv med ord, hvordan de ligger.
- d) Bestem accelerationsvektoren og afsæt den i de to punkter P og Q . Beskriv med ord, hvordan de ligger.

Kræfter og acceleration er ligeledes karakteriseret en *retning* og *størrelse*, Dvs de kan repræsenteres som vektorer.

<p>Man kan addere og subtrahere vektorer ved at gøre dette koordinatvis, og der gælder samme regneregler som i de reelle tal.</p> <p>Den geometriske repræsentation bliver imidlertid mere interessant, når vi går fra 1 til 2 dimensioner. I én dimension lægger vi blot linjestykker efter hinanden på en tallinje – eller lægger dem modsat, hvis det er subtraktion. I 2 og i 3 dimensioner svarer additionen til det, man siden oldtiden har kendt som "kræfternes parallelogram".</p>	
---	--

Øvelse

Givet vektorerne $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}$. Tegn vektorerne og bestem deres sum.

Vektorbegrebet, vektorregningen og vektorfunktioner passer så fint til Newtons klassiske mekanik, at man skulle tro denne matematiske formalisme var skabt dertil:

- Ved at beskrive de kræfter, der virker på en hængebros bærende kabler, som vektorer, og dernæst anvende vektorregningens metoder kan vi elegant bestemme formlerne for de kurver, som sådanne kabler følger.
- Det arbejde, en kraft udfører, kan udtrykkes ved et *skalarprodukt*.
- Den tværgående kraft (*kraftmomentet*), der fastholder et hurtigt snurrende hjuls retning, kan udtrykkes ved et *krydsprodukt*.

Det er faktisk sådan, at lærebøger i klassisk mekanik fremtræder som matematikbøger om avanceret vektorregning. Fysikken og matematikken er nærmest smeltet sammen. I en periode af naturvidenskabens udvikling førte det til forestillinger hos fx den franske fysiker og matematiker Laplace om, at verden var et sindrigt matematisk system, hvor alt kan forudsiges, blot vi kender alle begyndelsesbetingelser.

Men det er vigtigt at kunne skelne, ikke kun pga vores viden om kvantemekanikkens forunderlige verden, men også ud fra studier af det, der kaldes kaosteori. Den fysiske omverden findes – og den matematiske formalisme giver en forbløffende præcis beskrivelse heraf.

Når vektorer har fået deres eget navn og ikke bare kaldes to- eller tredimensionelle tal er det fordi der mangler noget. *Der findes ikke multiplikation af vektorer på linje med multiplikation af tal.* Der findes en særlig *skalarmultiplikation*, men dette giver netop en skalar (et tal) og ikke en vektor. Der findes i 3D, og

kun i 3D et særligt produkt, *krydsproduktet*, der faktisk giver en ny vektor. Krydsproduktet er uhyre hjælpsomt i den klassiske mekanik, men regnereglerne adskiller sig fra almindelige produkt, idet

$$\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{b} \times \vec{a} \quad \text{og} \quad \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \neq (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$$

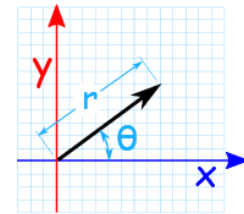
Der findes imidlertid todimensionelle tal, der er som vektorer mht. addition, og hvor vi kan indføre en multiplikation, der opfylder alle de almindelige regneregler. Disse tal kaldes for *de komplekse tal*. Og det er præcis den særlige multiplikation, der gør disse tal så nyttige. Multiplikationen af to komplekse tal indebærer nemlig en *drejning* i planen. Og når vi går skridtet videre og indfører vektorer, hvor *koordinaterne* er komplekse tal, så indebærer multiplikation en *rotation* i rummet.

4. Komplekse tal

Den matematiske formalisme, der udvikles vha. de komplekse tal – og vektorregning og matrixregning – viser sig at passe så fint til kvantemekanikken, at man skulle tro de var skabt til det. Men historien om de komplekse tal går faktisk helt tilbage til 1500-tallet, hvor man fandt ud af at løse tredjegrads ligninger. Den lader vi ligge her.

Vores udgangspunkt er de moderne vektorer i 2D. Vi introducerede vektorer som to-dimensionelle tal, der er bestemt af en længde og en retning. Retningen kan fx fastlægges som vinklen med en bestemt akse, fx 1.-aksen i et koordinatsystem. Disse to tal kan også betragtes som koordinater og kaldes for *polære koordinater*. Længden r kaldes også for *modulus*, og vinklen θ kaldes for *argumentet*.

I polære koordinater kan vi så skrive: $\vec{v} = (r, \theta)$



Hele vejen fra de naturlige tal har vi skridt for skridt udvidet talbegrebet. De komplekse tal vil vi også indføre som en udvidelse af de reelle tal. De reelle tal fylder hele tallinjen ud, så udvidelsen sker ved at gå ud i to dimensioner. De komplekse tal ligner i mange henseender vektorer, men de adskiller sig også derved, at vi kan indføre et produkt og vi kan udføre division. For at markere forskellen forlader vi nu vektor-notationen og betegner komplekse tal med almindelige bogstaver, som fx z og w . De repræsenteres af punkter i planen, og ikke pile. Men når vi adderer to komplekse tal, adderer vi deres stedvektorer, og finder endepunktet for denne sum.

Hvis spidsen af vektorpilen på tegningen kaldes for z , kan vi skrive: $z = (r, \theta)$.

Det komplekse tal, der afsættes i punktet $(1, 0)$, hedder i polære koordinater næsten det samme, nemlig $(1, 0^\circ)$. Det komplekse tal, der afsættes i $(-3, 0)$, hedder i polære koordinater $(3, 180^\circ)$. Det første tal angiver altså hvor langt punktet ligger fra Origo, det andet tal angiver hvor meget stedvektoren er drejet ift. 1. aksens positive del. Negative tal er drejet 180 grader.

Det komplekse tal der afsættes i punktet $(1, 1)$, hedder i polære koordinater $(\sqrt{2}, 45^\circ)$. Afstanden til Origo findes med Pythagoras til at være $\sqrt{2}$, og punktet ligger på vinkelhalveringslinjen $y = x$ i 1. kvadrant.

Øvelse

Angiv de polære koordinater til følgende:

$(-5, 0), (0, 5), (0, -3), (-2, 2), (2, -2)$

4.1 Analyse af kravet til multiplikation af komplekse tal

Lad os nu prøve at opskrive fortegnreglerne fra de reelle tal ved at se på de polære koordinater. Vi tager et simpelt eksempel, hvor vi ganger 2 med 3 og sætter forskellige fortegn på:

Fortegnsregler	oversættes til	udregning med polære koordinater
----------------	----------------	----------------------------------

$(+2) \cdot (+3) = +6$		$(2, 0^\circ) \cdot (3, 0^\circ) = (6, 0^\circ)$
$(+2) \cdot (-3) = -6$		$(2, 0^\circ) \cdot (3, 180^\circ) = (6, 180^\circ)$
$(-2) \cdot (+3) = -6$		$(2, 180^\circ) \cdot (3, 0^\circ) = (6, 180^\circ)$
$(-2) \cdot (-3) = +6$		$(2, 180^\circ) \cdot (3, 180^\circ) = (6, 360^\circ) = (6, 0^\circ)$

Opskrevet med polære koordinater er der sket følgende:

- *modulus ganges*: 2 og 3 er *ganget sammen* til den nye modulus på 6
- *argumenterne adderes*, fx $0^\circ + 180^\circ = 180^\circ$ og $180^\circ + 180^\circ = 360^\circ = 0^\circ$

I den sidste udregning har vi sagt, at en drejning af 1. aksens positive del på 360 grader er en hel omgang og svarer til 0 grader.

Hvis multiplikation af to komplekse tal $z_1 = (r_1, \theta_1)$ og $z_2 = (r_2, \theta_2)$ skal generalisere multiplikation af de reelle tal, så skal disse regler altså gælde. Hvis nu reglen for at gange komplekse tal sammen er følgende:

$$z_1 \cdot z_2 = (r_1, \theta_1) \cdot (r_2, \theta_2) = (r_1 \cdot r_2, \theta_1 + \theta_2) \quad (*)$$

så respekteres fortegnreglerne på den reelle talakse.

Går vi ud i planen og ser på det komplekse tal w , der afsat i punktet $(1,1)$, så så vi, at dette har de polære

koordinater $w = (\sqrt{2}, 45^\circ)$. Hvis (*) gælder, så er $w^2 = (\sqrt{2}, 45^\circ) \cdot (\sqrt{2}, 45^\circ) = (\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}, 45^\circ + 45^\circ) = (2, 90^\circ)$.

Dette er det komplekse tal, der er afsat i punktet $(0,2)$. Der sker altså en drejning.

Hvis vi nu starter på 2.aksen, og ser på tallet i , der er afsat i punktet $(0,1)$, så har dette de polære koordinater $(1, 90^\circ)$ og (*) giver derfor: $i^2 = (1, 90^\circ) \cdot (1, 90^\circ) = (1 \cdot 1, 90^\circ + 90^\circ) = (1, 180^\circ)$. Dette er det komplekse tal, der er afsat i punktet $(-1, 0)$. Men her er vi jo tilbage på den reelle talakse, så hvis de komplekse tal er en *udvidelse* af de reelle tal, så svarer dette tal til -1 , og vi har derfor:

$$i^2 = -1$$

Det må siges at være en overraskelse: Hvis vi forsøger at udvide de reelle tal til todimensionelle tal, der opfylder (*), så findes der et tal, der opløftet i anden giver -1 , dvs et tal, vi kunne vælge at betegne

$$i = \sqrt{-1}$$

Læg mærke til, at vi endnu ikke ved, om (*) giver os en god definition, så fx alle regneregler, vi kender fra de reelle tal, fortsat gælder. Det er let at se, at

- gange er *kommutativ*, dvs $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$
- gange er *associativ*, dvs $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$

Øvelse

Vis at (*) giver, at de to regler gælder

Det er straks sværere at se at den *distributive* lov gælder, dvs at $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$. Denne regel er jo en forudsætning for alle parentesregler, så den skal gælde for at vi kan tale om, at vi har indført multiplikation i todimensionelle tal. Det er svært at tjekke den distributive lov, fordi vi ikke har en lige så simpel formel som (*), når det gælder addition. Men den gælder også, og det vil fremgå af næste afsnit. Vi har nu afsluttet analysen, og vil på baggrund af denne indføre de komplekse tal fra bunden gennem definitioner.

4.2 Definition af de komplekse tal

Et andengradspolynomium $p(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ kan have 0, 1 eller 2 rødder. Det afhænger af diskriminanten, $d = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$. Er diskriminanten negativ, har ligningen $p(x) = 0$ ingen reelle løsninger.

Ligningen $x^2 - 2x + 3 = 0$ har således ingen reelle løsninger, da diskriminanten $d = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = -8$. Hvis vi uden omtanke brugte løsningsformlen ville det se det således ud:

$$x_1 = \frac{2 + \sqrt{-8}}{2} \text{ og } x_2 = \frac{2 - \sqrt{-8}}{2}$$

Det ser måske lidt sært ud, så vi beslutter at gøre prøve. Vi indsætter x_1 i ligningen og udregner derfor først x_1^2 og derefter $2 \cdot x_1$. Vi bruger brøkgregning og en af kvadratsætningerne:

$$x_1^2 = \left(\frac{2 + \sqrt{-8}}{2} \right)^2 = \frac{(2 + \sqrt{-8})^2}{2^2} = \frac{2^2 + (\sqrt{-8})^2 + 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{-8}}{4} = \frac{4 + (-8) + 4 \cdot \sqrt{-8}}{4} = \frac{-4 + 4 \cdot \sqrt{-8}}{4} = -1 + \sqrt{-8}$$

$$2 \cdot x_1 = 2 \cdot \frac{2 + \sqrt{-8}}{2} = \frac{2 \cdot (2 + \sqrt{-8})}{2} = (2 + \sqrt{-8})$$

Så indsætter vi i ligningen:

$$x^2 - 2x + 3 = (-1 + \sqrt{-8}) - (2 + \sqrt{-8}) + 3 = -1 + \sqrt{-8} - 2 - \sqrt{-8} + 3 = -3 + 3 = 0$$

Altså ligningen stemmer. Så x_1 er en løsning. Det samme kunne vi gøre med x_2 .

De to tal, x_1 og x_2 findes ikke på den reelle tallinje, så vi udelukker dem som løsninger. Men da vi gjorde prøve så vi, at de opfylder kravet til en løsning. Det fandt man faktisk ud af allerede i 1500-tallet. Det var løsninger, men man vidste godt, at kvadratrødder af negative tal var forbudt. Hvad gør man så? Man fandt man på en ny sprogbrug og kaldte disse tal for "indbildte tal", eller med et fremmedord: *imaginære tal*. For at gøre kvadratrødder af negative tal mere acceptable, så indførte man et nyt symbol for det imaginære tal $\sqrt{-1}$. Der var forskellige bud, men i dag anvendes symbolet i .

Ligesom tallet 1 er enheden på den reelle tallinje, så er $i = \sqrt{-1}$ enheden for de imaginære tal.

Fx skrives $\sqrt{-9} = \sqrt{9} \cdot i = 3 \cdot i$, og $\sqrt{-8} = \sqrt{8} \cdot i$

Det er ligeegyldigt, om man skriver $3 \cdot i$ eller $i \cdot 3$

Ligesom vi i de reelle tal har, at både $3^2 = 9$ og $(-3)^2 = 9$, sådan har vi også, at både $i^2 = -1$ og $(-i)^2 = -1$.

Vi definerer nu de komplekse tal:

Definition: De komplekse tal

De komplekse tal består af:

- Alle reelle tal
- Alle imaginære tal
- Alle lineære kombinationer af reelle og imaginære tal: $x + y \cdot i$, hvor x og y er reelle tal.

Komplekse tal adderes "koordinatvis": $(x_1 + y_1 \cdot i) + (x_2 + y_2 \cdot i) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) \cdot i$

Komplekse tal multipliceres med brug af de sædvanlige parentesregler.

Eksempel med multiplikation

Lad os se på et eksempel, hvordan multiplikation foregår:

$$(3 + 4 \cdot i) \cdot (5 - 6 \cdot i) = 3 \cdot 5 - 3 \cdot 6 \cdot i + 4 \cdot i \cdot 5 - 4 \cdot i \cdot 6 \cdot i = 15 - 18 \cdot i + 20 \cdot i - 24 \cdot i^2 = 15 + 2 \cdot i - 24 \cdot (-1) = 15 + 24 + 2 \cdot i = 39 + 2 \cdot i$$

Vi har i udregningen udnyttet, at $i^2 = -1$.

Og læg mærke til, at dette helt svarer til en udregning som vi kender med polynomier:

$$(3 + 4 \cdot x) \cdot (5 - 6 \cdot x) = 3 \cdot 5 - 3 \cdot 6 \cdot x + 4 \cdot x \cdot 5 - 4 \cdot x \cdot 6 \cdot x = 15 - 18 \cdot x + 20 \cdot x - 24 \cdot x^2 = 15 + 2 \cdot x - 24 \cdot x^2$$

Forskellen er alene i afslutningen, hvor vi kan reducere ved hjælp af $i^2 = -1$.

Vi har her skrevet $4 \cdot i$ osv, men vil ofte blot skrive $4i$.

Øvelse med multiplikation

- a) Udregn $7i \cdot (2 + 8i)$ b) Udregn $(-3 + i) \cdot 10i$

- c) Udregn $(2+i) \cdot (-3+5i)$ d) Udregn $(2,5-4i) \cdot (1-2i)$
 e) Udregn $(3-i) \cdot (3+i)$ f) Udregn $(7+3i)^2$

Den sammenligning vi foretog i eksemplet, hvor i blev udskiftet med x fortæller også, at alle regneregler, vi kender fra de reelle tal, også gælder for komplekse tal. Fx kvadratsætningerne. For de gælder jo, når vi regner med polynomier.

Eksempel: Den komplekse talplan

De komplekse tal er som omtalt en 2D udvidelse af de reelle tal. De reelle tal er stadig afsat på 1. akse (x-aksen). De imaginære tal afsættes op af 2. akse (y-aksen). Det komplekse tal $x + y \cdot i$ afsættes i punktet (x, y) . Når vi afsætter de komplekse tal i den komplekse talplan, så ser vi, at addition af to komplekse tal svarer til vektoraddition af de tilsvarende stedvektorer.

Øvelse med den komplekse talplan

- a) Afsæt de komplekse tal $z = 6 + 2i$ og $w = 1 + 5i$ i den komplekse talplan, udregn $z + w$ ved at bruge definitionen, afsæt dette tal og kontroller, at det svarer til vektoradditionens parallellogram-regel.
 b) Afsæt de komplekse tal $z = 2 - 6i$ og $w = -5 + i$ i den komplekse talplan, udregn $z + w$ ved at bruge definitionen, afsæt dette tal og kontroller, at det svarer til vektoradditionens parallellogram-regel.

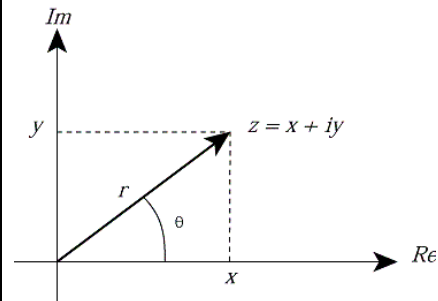
4.3 Modulus og Argument – Polære koordinater

Når vi har afsat et komplekst tal $z = x + iy$ i punktet med de sædvanlige koordinater (*cartesiske*) (x, y) i den komplekse talplan, kan vi se, at tallet også kan karakteriseres ved sine *polære* koordinater.

Disse er:

- *Modulus* r , der angiver afstanden fra Origo
- *Argumentet* θ , der angiver vinklen, som stedvektoren danner med 1. akse

Modulus og argumentet af z betegnes somme tider $|z|$ og $\arg(z)$



Øvelse om modulus og argument

- a) Brug tegningen og vis: $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ og $\tan(\theta) = \frac{y}{x}$, dvs $\theta = \text{Arctan}\left(\frac{y}{x}\right)$
 b) Bestem modulus og argument for tallene $2 + 2i$, $3i$, $5 + i$, $5 - i$, $-5 + i$

Øvelse med konjugering

- a) Afsæt de to tal $3 - i$ og $3 + i$ i den komplekse talplan. Beskriv deres beliggenhed ift. hinanden.
 b) Afsæt de to tal $2 + 5i$ og $2 - 5i$ i den komplekse talplan. Beskriv deres beliggenhed ift. hinanden.
 c) Afsæt de to tal $-4 + 7i$ og $-4 - 7i$ i den komplekse talplan. Beskriv deres beliggenhed ift. hinanden.

De tre øvelser er eksempler på en særlig regningsart vi har i de komplekse tal, som kaldes for *kompleks konjugering*, og som betegnes med en overliggende streg:

$$\overline{x + y \cdot i} = x - y \cdot i$$

Øvelse

Lad $z = x + y \cdot i$. Vis at $z \cdot \bar{z} = |z|^2$, hvor vi husker, at $|z|$ betegner modulus.

Hvis vi kender de polære koordinater, $z = (r, \theta)$, så kan vi bestemme x og y således (se tegningen):

$$x = r \cdot \cos(\theta) \text{ og } y = r \cdot \sin(\theta)$$

Dvs vi kan skrive et kompleks tal således:

$$z = r \cos(\theta) + i \cdot r \sin(\theta) = r \cdot (\cos(\theta) + i \sin(\theta))$$

Tallet $\cos(\theta) + i \sin(\theta)$ ligger på enhedscirklen – det ligger i definitionen på cosinus og sinus. Ved hjælp af denne måde at skrive et kompleks tal på, kan vi nu vise formelen (*) vi gav i afsnit 4.1, hvor vi foretog en analyse af de komplekse tals egenskaber, hvis de fandtes.

4.4 Multiplikation af komplekse tal giver rotation

Lad os betragte to komplekse tal z og w , der begge ligger på enhedscirklen. Deres modulus er for begge lig med 1. Lad os sige at argumentet for z er s og argumentet for w er t :

$$z = \cos(s) + i \cdot \sin(s)$$

$$w = \cos(t) + i \cdot \sin(t)$$

Vi vil nu udregne $z \cdot w$ og anvende følgende *additionsformler*, som er bevist i kapitlet: *Den komplekse eksponentialfunktion*.

$$\text{Formel nr A2: } \cos(s+t) = \cos(s) \cdot \cos(t) - \sin(s) \cdot \sin(t)$$

$$\text{Formel nr A4: } \sin(s+t) = \sin(s) \cdot \cos(t) + \cos(s) \cdot \sin(t)$$

$$\begin{aligned} z \cdot w &= (\cos(s) + i \cdot \sin(s)) \cdot (\cos(t) + i \cdot \sin(t)) \\ &= \cos(s) \cdot \cos(t) + \cos(s) \cdot i \cdot \sin(t) + i \cdot \sin(s) \cdot \cos(t) + i \cdot \sin(s) \cdot i \cdot \sin(t) \\ &= \cos(s) \cdot \cos(t) + i \cdot \cos(s) \cdot \sin(t) + i \cdot \sin(s) \cdot \cos(t) + i \cdot i \cdot \sin(s) \cdot \sin(t) \\ &= \cos(s) \cdot \cos(t) - \sin(s) \cdot \sin(t) + i \cdot \cos(s) \cdot \sin(t) + i \cdot \sin(s) \cdot \cos(t) \\ &= (\cos(s) \cdot \cos(t) - \sin(s) \cdot \sin(t)) + i \cdot (\cos(s) \cdot \sin(t) + \sin(s) \cdot \cos(t)) \end{aligned}$$

Øvelse

Gør nøje rede for, hvad der sker fra linje til linje.

Læg nu mærke til, at de to parenteser præcis er de to additionsformler A2 og A4, der er citeret ovenfor – i den sidste er det blot skrevet i en anden rækkefølge. Men det vil altså sige, at

$$z \cdot w = \cos(s+t) + i \cdot \sin(s+t)$$

Når vi ganger to komplekse tal, der ligger på enhedscirklen, så adderes deres argumenter

Hvis det nu i stedet er to vilkårlige komplekse tal:

$$z_1 = r_1 \cdot (\cos(\theta_1) + i \cdot \sin(\theta_1))$$

$$z_2 = r_2 \cdot (\cos(\theta_2) + i \cdot \sin(\theta_2))$$

så får vi:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1 \cdot (\cos(\theta_1) + i \cdot \sin(\theta_1)) \cdot r_2 \cdot (\cos(\theta_2) + i \cdot \sin(\theta_2)) \\ &= r_1 \cdot r_2 \cdot (\cos(\theta_1) + i \cdot \sin(\theta_1)) \cdot (\cos(\theta_2) + i \cdot \sin(\theta_2)) \\ &= r_1 \cdot r_2 \cdot (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2)) \end{aligned}$$

Skriver vi z_1 og z_2 med polære koordinater:

$$z_1 = (r_1, \theta_1) \text{ og } z_2 = (r_2, \theta_2)$$

så kan udregningen ovenfor skrives:

$$z_1 \cdot z_2 = (r_1 \cdot r_2, \theta_1 + \theta_2)$$

Vi har dermed vist:

Multiplikation af komplekse tal

Givet to komplekse tal skrevet med polære koordinater:

$$z_1 = r_1 \cdot (\cos(\theta_1) + i \cdot \sin(\theta_1)) = (r_1, \theta_1)$$

$$z_2 = r_2 \cdot (\cos(\theta_2) + i \cdot \sin(\theta_2)) = (r_2, \theta_2)$$

Så er

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2)), \text{ eller:}$$

$$z_1 \cdot z_2 = (r_1 \cdot r_2, \theta_1 + \theta_2)$$

Formuleret med ord:

To komplekse tal ganges sammen ved *gange deres modulus og addere deres argumenter*.

Bemærkning: Er z_0 et bestemt komplekst tal, og udfører vi den operation, at alle andre komplekse tal ganges med z_0 så indebærer denne operation, at vi foretager *en rotation af planen med vinklen $\arg(z_0)$*

Øvelse

Et komplekst tal er skrevet på formen: $z = r \cdot (\cos(s) + i \cdot \sin(s))$

a) Vis, at $|z| = r$

b) Givet to komplekse tal, vis at $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$

c) Formuler med ord, hvad formelen i b) siger

I kapitlet om den komplekse eksponentialfunktion argumenterer vi for, at en naturlig udvidelse af den naturlige eksponentialfunktion e^t så definitionsmængden bliver alle komplekse tal er følgende definition:

$$\text{Hvis } z = x + iy, \text{ så defineres } e^z = e^{x+iy} := e^x \cdot (\cos(y) + i \sin(y))$$

Øvelse

Vis Eulers berømte formel: $e^{i\pi} = -1$

Appendiks 2. Den komplekse eksponentialfunktion

Den matematiske formalisme, vi anvender til at beskrive og forsøge at begribe kvanteverden, anvender de komplekse tal som sin talmængde. Efter at have udvidet de reelle tal til de komplekse tal er det næste naturlige skridt at udvide funktionsbegrebet. En kompleks funktion f er *defineret* på de komplekse tal – evt kun en delmængde af dem – og *funktionsværdierne* $f(z)$ er også komplekse tal. Det giver en vanskelighed med at illustrere det, man taler om. Definitionsmængden ligger i den todimensionelle komplekse talplan. Men funktionsværdierne ligger også i en to-dimensional kompleks talplan. Dvs. vi skal bruge et 4-dimensionalt koordinatsystem for at tegne en graf! Det kan vi ikke umiddelbart gøre – men man kan få et vist indtryk af grafen, ved at kun at betragte udsnit af definitionsmængden. Det er den samme type tricks, vi anvender for at anskueliggøre fænomener i kvanteverden, når vi her illustrerer med brug af "Bloch-sfæren", se det store kapitel xxx og det lille specielle kapitel herom.

Når vi udvider fra funktioner af én variabel til funktioner af to eller flere variable, så opstår der selvfølgelig nyt, men i alt væsentligt er der tale om generaliseringer, fx i anvendelsen af differentialregning til undersøgelse af ekstrema og krumningsforhold for grafer. Man kunne tro, at det også var tilfældet, når vi udvider til de komplekse tal, da et komplekst tal er et todimensionalt tal. Men teorien for komplekse funktioner er en helt ny og anderledes verden med forunderlige resultater. Det er videregående matematik, men vi vil her løfte en flig og give et lille indkig med en undersøgelse af den komplekse eksponentialfunktion, og af hvordan denne hænger sammen med de trigonometriske funktioner. I den komplekse verden opdager vi, at de to funktionsklasser på en måde er to sider af samme sag!

I kapitlet om komplekse tal gav vi to forskellige koordinatbeskrivelser af et komplekst tal, z :

	koordinatform	udfoldet form
Retvinklede (eller cartesiske) koordinater	$z = (x, y)$	$z = x + i \cdot y$
Polære koordinater	$z = (r, \theta)$	$z = r \cdot (\cos(\theta) + i \cdot \sin(\theta))$

Vi vil nu give en definition af den komplekse eksponentialfunktion, der ved første blik virker besynderlig – og man skal huske, at vi her ikke har bevist noget eller argumenteret for noget, der umiddelbart ville lede tankerne i denne retning.

Definition af den komplekse eksponentialfunktion

1) Givet et rent imaginært tal $w = i \cdot t$, hvor t er et reelt tal, så defineres:

$$f(w) = f(i \cdot t) = \cos(t) + i \cdot \sin(t)$$

2) Givet et vilkårlig komplekst tal $z = x + i \cdot y$, hvor x og y er reelle tal, så defineres:

$$f(z) = f(x + i \cdot y) = e^x \cdot (\cos(y) + i \cdot \sin(y))$$

Funktionen f kaldes for den komplekse eksponentialfunktion, og skrives også således:

$$f(z) = e^z, \text{ dvs } f(x + i \cdot y) = e^x \cdot e^{iy} = e^x \cdot (\cos(y) + i \cdot \sin(y))$$

Bemærkning: Definitionerne 1) og 2) stemmer overens, idet:

$$f(0 + i \cdot y) = e^0 \cdot (\cos(y) + i \cdot \sin(y)) = 1 \cdot (\cos(y) + i \cdot \sin(y)) = \cos(y) + i \cdot \sin(y)$$

Da vi i kapitlet om de komplekse tal indførte polære koordinater så vi, at alle tal på formen $\cos(t) + i \cdot \sin(t)$ ligger på enhedscirklen. Hvis det reelle t løber fra 0 og fremad i talrækken, så vil det komplekse tal $i \cdot t$ gennemløbe den imaginære talakse (2. aksens) fra 0 og opad. Det komplekse tal $\cos(t) + i \cdot \sin(t)$ vil gennemløbe enhedscirklen, og når vi når op til $i \cdot 2\pi$ har vi bevæget os én gang rundt. Når vi kommer til $i \cdot 4\pi$ har vi bevæget os to gange rundt osv.

Så den lodrette linje i planen med ligningen $x=0$ (dvs y -aksen) afbildes ved den komplekse eksponentialfunktion i enhedscirklen:

$$f(i \cdot t) = \cos(t) + i \cdot \sin(t)$$

Enheds-cirklen er grafen for det snit i definitionsmængden, som udgøres af 2. akse.

Hvad så med den vandrette linje $y=0$ (1. akse). Alle tal her kan skrives $z = x + i \cdot 0$, så ved brug af definitionen på den komplekse eksponentialfunktion punkt b) får vi:

$$f(z) = f(x + i \cdot 0) = e^x \cdot (\cos(0) + i \cdot \sin(0)) = e^x \cdot (1 + i \cdot 0) = e^x$$

Den naturlige eksponentialfunktions graf er grafen for det snit i definitionsmængden, som udgøres af 1. akse.

Øvelse

Et komplekst tal $z_0 = x_0 + i \cdot y_0$ svarer i den komplekse talplan til punktet $z_0 = (x_0, y_0)$. Dette ligger på den lodrette linje $x = x_0$, og på den vandrette linje $y = y_0$.

a) Hvad er billedet af den lodrette linje $x = x_0$ ved brug af den komplekse eksponentialfunktion?

(Hint: Et vilkårligt punkt på linjen kan skrives (x_0, t) . Anvend så definitionens punkt b).

b) Hvad er billedet af den vandrette linje $y = y_0$ ved brug af den komplekse eksponentialfunktion?

(Hint: Et vilkårligt punkt på linjen kan skrives (t, y_0) . Anvend så definitionens punkt b).

Konklusion:

De lodrette linjer $x = x_0$ i den komplekse talplan afbildes over i cirkler med centrum i $(0,0)$ og med eksponentielt voksende radius, efterhånden som de lodrette linjer skubbes længere og længere ud.

De vandrette linjer $y = y_0$ i den komplekse talplan afbildes alle over i kopier af grafen for den naturlige eksponentialfunktion, tegnet i lodrette planer i en retning bestemt af punktet på enhedscirklen med koordinaterne $(\cos(y_0), \sin(y_0))$.

Man kunne fortsætte med at se på andre snit i definitionsmængden. *Fx afbildes skrå linjer som linjen med ligning $y = x$ over i spiraler.* Men vi vil her koncentrere os om at argumentere for, at det giver god mening at kalde den funktion f , vi har defineret, for den komplekse eksponentialfunktion.

Additionsformlerne for sinus og cosinus

I kapitlet om komplekse tal beviste vi følgende:

Givet to komplekse tal skrevet med polære koordinater:

$$z_1 = r_1 \cdot (\cos(\theta_1) + i \cdot \sin(\theta_1)) = (r_1, \theta_1)$$

$$z_2 = r_2 \cdot (\cos(\theta_2) + i \cdot \sin(\theta_2)) = (r_2, \theta_2)$$

Så er

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2)), \text{ eller:}$$

$$z_1 \cdot z_2 = (r_1 \cdot r_2, \theta_1 + \theta_2)$$

Formuleret med ord:

To komplekse tal ganges sammen ved at gange deres modulus og addere deres argumenter.

Denne formel er faktisk en af begrundelserne for, at funktionen f ovenfor kan opfattes som en eksponentialfunktion. Det forklarer vi nærmere i næste afsnit

Formlen $z_1 \cdot z_2 = (r_1 \cdot r_2, \theta_1 + \theta_2)$ blev bevist med brug af *additionsformlerne*. Dette er følgende formler:

Additionsformlerne for cosinus og sinus

Lad s og t være to vilkårlige vinkler, enten målt i grader eller i radiantal. Så gælder følgende formler:

A1) $\cos(s - t) = \cos(s) \cdot \cos(t) + \sin(s) \cdot \sin(t)$

A2) $\cos(s + t) = \cos(s) \cdot \cos(t) - \sin(s) \cdot \sin(t)$

A3) $\sin(s - t) = \sin(s) \cdot \cos(t) - \cos(s) \cdot \sin(t)$

A4) $\sin(s + t) = \sin(s) \cdot \cos(t) + \cos(s) \cdot \sin(t)$

Beviset for formlerne bygger dels på *vektorregning*, dels på viden om de såkaldte *overgangsformler*. Beviserne for overgangsformlerne bygger på betragtning af enhedscirklen.

Overgangsformlerne er mange, men nogle af de vigtigste er:

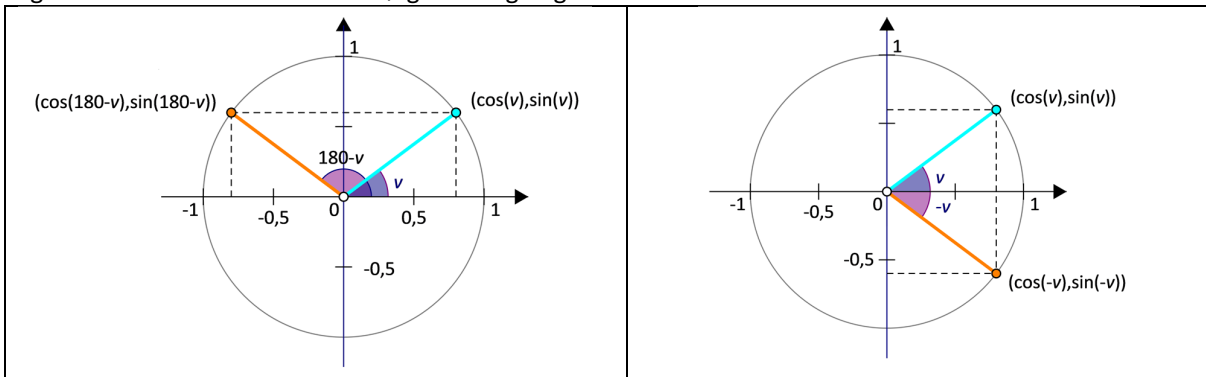
O1) $\cos(\pi - t) = -\cos(t)$ og $\sin(\pi - t) = \sin(t)$

eller: $\cos(180^\circ - t) = -\cos(t)$ og $\sin(180^\circ - t) = \sin(t)$

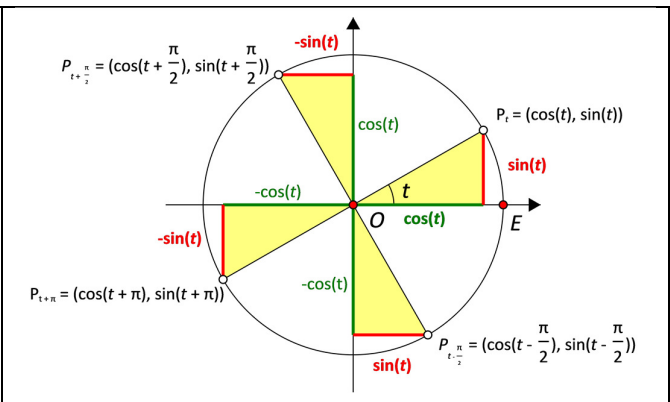
O2) $\cos(-t) = \cos(t)$ og $\sin(-t) = -\sin(t)$

Øvelse

Argumenter for formlerne ud fra følgende tegninger:



O3) $\cos(\pi/2 - t) = \sin(t)$ og $\sin(\pi/2 - t) = \cos(t)$
 eller: $\cos(90^\circ - t) = \sin(t)$ og $\sin(90^\circ - t) = \cos(t)$
 O4) $\cos(t - \pi/2) = \sin(t)$ og $\sin(t - \pi/2) = -\cos(t)$
 eller: $\cos(t - 90^\circ) = \sin(t)$ og $\sin(t - 90^\circ) = -\cos(t)$
 O5) $\cos(t + \pi/2) = -\sin(t)$ og $\sin(t + \pi/2) = \cos(t)$
 eller: $\cos(t + 90^\circ) = -\sin(t)$ og $\sin(t + 90^\circ) = \cos(t)$
 O6) $\cos(t + \pi) = -\cos(t)$ og $\sin(t + \pi) = -\sin(t)$
 eller: $\cos(t + 180^\circ) = -\cos(t)$ og $\sin(t + 180^\circ) = -\sin(t)$



Øvelse

Argumentér for formlerne ud fra tegningen.

(Hint: Benyt din viden om cos og sin i retvinklede trekanter og din viden om tværvektor)

Bevis for additionsformlerne.

Vi antager i det følgende, at s og t er positive tal. Andre tilfælde er lette at føre tilbage til denne situation fx ved hjælp af overgangsformlerne.

A1

Lad der være givet to tal s og t , som vi betragter som radiantal for vinkler, der har retningspunkterne P_s og P_t på enhedscirklen. Centrum kaldes for O . Vi danner stedvektorerne

$$\vec{a} = \overrightarrow{OP_s} = \begin{pmatrix} \cos(s) \\ \sin(s) \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \overrightarrow{OP_t} = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

s og t er vinklerne, som stedvektorerne danner med 1. akse (målt i koordinatsystemets omløbsretning). En af dem er størst, fx s . Vinklen mellem de to vektorer er så $s - t$.

Vi anvender nu formlen for sammenhængen mellem prikprodukt og \cos til vinklen v imellem vektorerne:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(v)$$

Venstre side: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} \cos(s) \\ \sin(s) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} = \cos(s) \cdot \cos(t) + \sin(s) \cdot \sin(t)$

Højre side: $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(v) = 1 \cdot 1 \cdot \cos(s - t) = \cos(s - t)$

Konklusion: $\cos(s - t) = \cos(s) \cdot \cos(t) + \sin(s) \cdot \sin(t)$. Det var formlen A1.

A2

Lad der igen være givet to tal s og t . s er radiantal for retningspunktet P_s på enhedscirklen. $-t$ er radiantal for retningspunktet P_{-t} . Centrum kaldes for O . Vi danner stedvektorerne

$$\vec{a} = \overrightarrow{OP_s} = \begin{pmatrix} \cos(s) \\ \sin(s) \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \overrightarrow{OP_{-t}} = \begin{pmatrix} \cos(-t) \\ \sin(-t) \end{pmatrix}$$

Vinklen mellem de to er nu: $s + t$.

Vi indsætter i $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(v)$:

Venstre side: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} \cos(s) \\ \sin(s) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(-t) \\ \sin(-t) \end{pmatrix} = \cos(s) \cdot \cos(-t) + \sin(s) \cdot \sin(-t)$

Det sidste udtryk kan omskrives med brug af overgangsformlen O1:

$$= \cos(s) \cdot \cos(t) + \sin(s) \cdot (-\sin(t)) = \cos(s) \cdot \cos(t) - \sin(s) \cdot \sin(t)$$

Højre side: $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(v) = 1 \cdot 1 \cdot \cos(s + t) = \cos(s + t)$

Konklusion: $\cos(s + t) = \cos(s) \cdot \cos(t) - \sin(s) \cdot \sin(t)$. Det var formlen A2

A3

Udnyt O3 til at omskrive:

$$\sin(s - t) = \cos(\pi/2 - (s - t)) = \cos((\pi/2 - s) + t)$$

Udnyt A2 til at skrive videre på dette

$$= \cos((\pi/2 - s) + t) = \cos(\pi/2 - s) \cdot \cos(t) - \sin(\pi/2 - s) \cdot \sin(t)$$

Udnyt igen O3 til at omskrive det sidste:

$$= \cos(\pi/2 - s) \cdot \cos(t) - \sin(\pi/2 - s) \cdot \sin(t) = \sin(s) \cdot \cos(t) - \cos(s) \cdot \sin(t)$$

Konklusion: Fra start til slut får vi:

$$\sin(s - t) = \sin(s) \cdot \cos(t) - \cos(s) \cdot \sin(t). \text{ Det er formlen A3}$$

Øvelse: Bevis A4

Bevis selv formel A4 ud fra samme metode som ved A3.

Funktionen f opfylder potensregnerne

Vi minder igen om reglen for multiplikation af komplekse tal:

Givet to komplekse tal skrevet med polære koordinater:

$$z_1 = r_1 \cdot (\cos(\theta_1) + i \cdot \sin(\theta_1)) = (r_1, \theta_1)$$

$$z_2 = r_2 \cdot (\cos(\theta_2) + i \cdot \sin(\theta_2)) = (r_2, \theta_2)$$

Så er

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2)), \text{ eller:}$$

$$z_1 \cdot z_2 = (r_1 \cdot r_2, \theta_1 + \theta_2)$$

Formuleret med ord:

To komplekse tal ganges sammen ved at *gange deres modulus og addere deres argumenter*.

Lad os nu begrænse os til komplekse tal på enhedscirklen, hvor modulus er 1. Så forenkles formlen til:

$$z_1 \cdot z_2 = (1, \theta_1 + \theta_2) \quad (*)$$

En sproglig repræsentation af (*) vil lyde således:

To komplekse tal på enhedscirklen ganges sammen ved at *addere deres argumenter*.

Det minder om den vigtigste af potensregnerregler, nemlig:

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s} \quad (**)$$

En sproglig repræsentation af (**) vil lyde således:

To potenser ganges sammen ved at *addere eksponenterne*.

Regnereglen (**) er karakteristisk for eksponentialfunktioner, så dette antyder, at der er noget om snakken, når vi kalder funktionen $f(z) = f(x + i \cdot y) = e^x \cdot (\cos(y) + i \cdot \sin(y))$ for den komplekse eksponentialfunktion. Men netop kun antyder, for to funktioner kan jo godt dele nogle egenskaber uden at tilhøre samme klasse. Trigonometriske funktioner er periodiske, men det betyder jo ikke at alle periodiske funktioner er trigonometriske. Det viser sig imidlertid her, at egenskaben (**) er *karakteristisk* for eksponentialfunktioner. Hvis en funktion er differentiable og har egenskaber (**) så er det en eksponentialfunktion!

Funktionalligninger

Hvis vi definerer funktionen $f_1(t) := \cos(t) + i \cdot \sin(t)$, så kan (*) udtrykkes således:

$$f_1(\theta_1) \cdot f_1(\theta_2) = f_1(\theta_1 + \theta_2)$$

Hvis vi definerer $g(x) := a^x$, så kan (**) udtrykkes således:

$$g(r) \cdot g(s) = g(r + s)$$

En sådan ligning kaldes en funktionalligning. En funktionalligning udtrykker en almen egenskab og løsning af ligningen betyder at bestemme alle de funktioner, der opfylder den egenskab.

Lad os nu antage, at vi har en funktion h , der er differentiable, defineret for alle reelle tal og som opfylder:

$$h(x) \cdot h(y) = h(x + y) \text{ for alle tal } x \text{ og } y. \quad (***)$$

1. Hvis h er nulfunktionen, $h(x) = 0$ for alle tal x , så er funktionalligningen opfyldt. **Så nulfunktionen er én af løsningerne til (***)**.

I det følgende antager vi nu, at h ikke er nulfunktionen.

2. Vælg et tal a , så $h(a) \neq 0$. Indsæt $x = 0$ og $y = a$ i (***):

$$h(0) \cdot h(a) = h(0 + a)$$

$$h(0) \cdot h(a) = h(a)$$

Men da $h(a) \neq 0$ kan vi så forkorte den væk og får: $h(0) = 1$

3. h er differentiabel overalt, specielt i $x = 0$. Lad os kalde differentialkvotienten i 0 for k : $h'(0) = k$. Hvis nu $k = 0$, så ved vi fra monotonisætningen, at funktionen er konstant. Da $h(0) = 1$, må denne konstant være 1. Ved kontrol med (***) kan vi se, at **den konstante funktion $h(x) = 1$ er en løsning til (***)**.

I det følgende antager vi, at $k \neq 0$

4. Vi vil nu vise, at $h'(x) = k \cdot h(x)$, dvs at $h(x)$ er løsning til differentialligningen $y' = k \cdot y$. Den differentialligning kan vi nemlig løse.

4a. *Bevis med brug af epsilonfunktioner.*

Definitionen på, at en funktion f er differentiabel med differentialkvotienten $f'(x) = a$ er, at der findes en epsilonfunktion $E(x)$, så der for en tilvækst s ud fra tallet x gælder:

$$f(x+s) = f(x) + a \cdot s + E(s) \cdot s \quad (\#)$$

Vi opskriver definitionen på at $h'(0) = k$ med brug af (#): Der findes en epsilonfunktion $E(x)$, så der for en vilkårlig tilvækst s ud fra tallet 0 gælder:

$$h(0+s) = h(0) + h'(0) \cdot s + E(s) \cdot s \quad \text{Vi reducerer:}$$

$$h(s) = 1 + k \cdot s + E(s) \cdot s \quad (\#\#)$$

Vi ved h er differentiabel i et vilkårligt x og opskriver nu ligningen (#) for $h(x+s)$:

$$h(x+s) = h(x) + h'(x) \cdot s + E_1(s) \cdot s \quad (\#\#\#)$$

Vi udnytter nu funktionalligningen: $h(x+s) = h(x) \cdot h(s)$ og ganger $h(x)$ på (\#\#):

$$h(x) \cdot h(s) = h(x) \cdot (1 + k \cdot s + E(s) \cdot s)$$

$$h(x) \cdot h(s) = h(x) \cdot 1 + h(x) \cdot k \cdot s + h(x) \cdot E(s) \cdot s \quad \text{Vi har ganget ind i parenteser}$$

$$h(x) \cdot h(s) = h(x) + (h(x) \cdot k) \cdot s + (h(x) \cdot E(s)) \cdot s \quad \text{Vi har reduceret og sat parenteser}$$

$$h(x) \cdot h(s) = h(x) + (k \cdot h(x)) \cdot s + (h(x) \cdot E(s)) \cdot s \quad \text{Vi har byttet rundt på k og $h(x)$ }$$

Sammenlign nu med (\#\#\#):

$$h(x) \cdot E(s) \text{ er selv en epsilonfunktion som vi kalder } E_1(s)$$

$$k \cdot h(x) \text{ står på den plads, hvor differentialkvotienten } h'(x) \text{ står}$$

Konklusion: $h'(x) = k \cdot h(x)$

4a. *Bevis med brug af tretrinsreglen.*

Definitionen på, at en funktion f er differentiabel med differentialkvotienten $f'(x) = a$ er, at differenskvotienten (sekanthældningen) har en grænseværdi, når s går mod 0:

$$\frac{f(x+s) - f(x)}{s} \rightarrow a \text{ når } s \rightarrow 0 \quad (\#)$$

Vi opskriver definitionen på at $h'(0) = k$ med brug af (#):

$$\frac{h(0+s) - h(0)}{s} \rightarrow k \text{ når } s \rightarrow 0$$

$$\frac{h(s) - 1}{s} \rightarrow k \text{ når } s \rightarrow 0 \quad (\#\#) \quad \text{Vi har reduceret}$$

Vi ved h er differentiabel i et vilkårligt x og opskriver nu betingelsen (#), som vi ved gælder for sekanthældningerne:

$$\frac{h(x+s) - h(x)}{s} \rightarrow h'(x) \text{ når } s \rightarrow 0 \quad (\#\#\#)$$

Vi udnytter nu funktionalligningen: $h(x+s) = h(x) \cdot h(s)$ og indsætter i differenskvotienten i (\#\#\#):

$$\frac{h(x+s) - h(x)}{s} = \frac{h(x) \cdot h(s) - h(x)}{s}$$

$$\frac{h(x+s)-h(x)}{s} = \frac{h(x) \cdot h(s) - h(x) \cdot 1}{s}$$

Vi har blot tilføjet "gange med 1"

$$\frac{h(x+s)-h(x)}{s} = \frac{h(x) \cdot (h(s)-1)}{s}$$

Vi har sat den fælles faktor uden for parentes

$$\frac{h(x+s)-h(x)}{s} = h(x) \cdot \frac{(h(s)-1)}{s}$$

Vi har udnyttet en brøkregel

Læg nu mærke til, at den sidste brøk er den, som vi kender fra (xx). Så nu kan vi lade s gå mod 0:

$$\frac{h(x+s)-h(x)}{s} = h(x) \cdot \frac{(h(s)-1)}{s} \rightarrow h(x) \cdot k \text{ når } s \rightarrow 0$$

Men vi ved fra (xxx), at der "for enden af pilen" står differentialkvotienten. Så vi får:

$$h'(x) = h(x) \cdot k \text{ eller } h'(x) = k \cdot h(x)$$

5. Vi har nu bevist, at løsninger til funktionalligningen $h(x) \cdot h(y) = h(x+y)$ kan opdeles i tre typer

- Nulfunktionen $h(x) = 0$
- Den konstante funktion $h(x) = 1$
- Alle funktioner, der opfylder differentialligningen $y' = k \cdot y$

Denne differentialligning er den første interessante differentialligning, som vi møder under dette emne. Og vi beviser der, at den fuldstændige løsning til denne er:

Alle funktioner med forskrift: $y = c \cdot e^{kt}$ eller $f(t) = c \cdot e^{kt}$.

Vi så i punkt 2, at for den vilkårlige funktion h var $h(0) = 1$. Det gælder så også for løsninger $f(t) = c \cdot e^{kt}$.

Men så er $c = 1$.

Så løsningen til funktionalligningen $h(x) \cdot h(y) = h(x+y)$ er:

- Nulfunktionen $h(x) = 0$
- Den konstante funktion $h(x) = 1$
- Alle funktioner med forskrift $h(t) = e^{kt}$

Når vi udvider talmængden til at omfatte de komplekse tal, så følger de fleste formler og løsningsmetoder, som vi kender i de reelle tal med. Det er let at se, fordi udledningen bygger på de regneregler, som også overtages i de komplekse tal. Det gælder fx formlen til løsning af andengradsligningen (hvor der ingen forbehold er mht diskriminanten), og det gælder formlerne for løsning af differentialligninger.

Hvad er det tal k som optræder i differentialligningen $y' = k \cdot y$? I beviset indførte vi det som $h'(0) = k$.

I vores særlige situation er den funktion, vi indførte i punkt 1 i definitionen:

$$f(i \cdot t) = \cos(t) + i \cdot \sin(t)$$

Lad os udregne $f'(0)$:

$$f'(t) = (\cos(t) + i \cdot \sin(t))' = \cos'(t) + i \cdot \sin'(t) = -\sin(t) + i \cdot \cos(t)$$

hvor vi har udnyttet formlerne for differentiation af cos og sin.

Indsæt nu 0:

$$f'(0) = -\sin(0) + i \cdot \cos(0) = -0 + i \cdot 1 = i$$

Dvs tallet k i vores situation er lig med tallet i .

Vi er hermed ved vejs ende med den opgave vi satte os:

Den komplekse eksponentialfunktion

Det er velbegrunder at betegne den funktion, vi indførte i punkt 1 i definitionen, $f(i \cdot t) = \cos(t) + i \cdot \sin(t)$ som en eksponentialfunktion, og skrive den på formen e^{it} .

Det er velbegrunderet, at betegne funktionen $f(z) = f(x + i \cdot y) = e^x \cdot (\cos(y) + i \cdot \sin(y))$ som den komplekse eksponentialfunktion og skrive den på formen: e^{x+iy} .

Der er naturligvis en række detaljer, man bør udfylde, for fx at se, at de metoder, vi anvender til at løse differentiaalligninger også holder i den komplekse verden. Noget af dette er indeholdt i følgende øvelse.

Øvelse

a) Vis, at hvis $z_1 = x_1 + y_1$ og $z_2 = x_2 + y_2$ så er $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$

b) Vis at hvis $f(i \cdot t) = \cos(t) + i \cdot \sin(t)$, så er $f'(i \cdot t) = i \cdot f(i \cdot t)$.

(Skrevet med den eksponentielle notation: $(e^{it})' = i \cdot e^{it}$)

c) Vis at hvis $f(i \cdot t) = \cos(t) + i \cdot \sin(t)$, så er $f(i \cdot t) \cdot f(-i \cdot t) = 1$

(Skrevet med den eksponentielle notation: $e^{it} \cdot e^{-it} = 1$)

d) Find beviset for løsning af differentiaalligningen $y' = k \cdot y$ i det reelle tilfælde, og udnyt metoden dér sammen med c) til at vise, at løsningen til differentiaalligningen $y' = i \cdot y$ er alle funktioner med forskrift $y = c \cdot e^{it}$

Appendiks 3. Sfærisk geometri og Bloch-sfæren

Kvantebits på kompleks form

Med de komplekse tal til rådighed, kan vi opstille den generelle form for en kvantebit. Spinnets af et kvantemekanisk system – som en elektron – kan måles efter en vilkårlig retning i rummet, og en måling efter en akse i 3d vil som i 2d altid give to mulige værdier: op eller ned, th eller tv, + eller –, eller hvad vi nu kalder det.

Vi vil bygge videre på den notation og symbolik, vi har indført, og beskrive en kvantetilstand således:

$$|\psi\rangle = \alpha \cdot |0\rangle + \beta \cdot |1\rangle$$

hvor α og β er komplekse tal. Som i tilfældet med reelle tal gælder også her:

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

De komplekse tal kan skrives på polær form: $\alpha = r_\alpha \cdot e^{it_\alpha}$ og $\beta = r_\beta \cdot e^{it_\beta}$. Vi indsætter, og ser vi har fire parametre, der kan variere:

$$|\psi\rangle = r_\alpha \cdot e^{it_\alpha} \cdot |0\rangle + r_\beta \cdot e^{it_\beta} \cdot |1\rangle$$

En af vanskelighederne ved at håndtere komplekse tal er netop dette, at vi har flere variable, end der er "plads til" i de 3 dimensionale koordinatsystem. Men de variable varierer ikke frit! Det vi måler er sandsynligheder, $|\alpha|^2$ og $|\beta|^2$. Og vi ved fra kapitlet om komplekse tal, at $e^{it} = \cos(t) + i \cdot \sin(t)$, dvs det er et komplekst tal på enhedscirklen, så ved vi, at $|e^{it}| = 1$. Men så ændres sandsynlighederne ikke, hvis vi ganger et tal som e^{it} på α eller β !

Vi drejer derfor hele systemet med argumentet $-t_\alpha$, ved at gange med e^{-it_α} . Det giver ingen ændring i kvantetilstanden $|\psi\rangle = \alpha \cdot |0\rangle + \beta \cdot |1\rangle$, da det jo blot svarer til at dreje koordinatsystemet med argumentet (vinklen) t_α . Når vi ganger på, får vi:

$$|\psi'\rangle = e^{-it_\alpha} \cdot |\psi\rangle = r_\alpha \cdot e^{it_\alpha} \cdot e^{-it_\alpha} \cdot |0\rangle + r_\beta \cdot e^{it_\beta} \cdot e^{-it_\alpha} \cdot |1\rangle$$

$$|\psi'\rangle = r_\alpha \cdot |0\rangle + r_\beta \cdot e^{it_\beta - it_\alpha} \cdot |1\rangle$$

$$|\psi'\rangle = r_\alpha \cdot |0\rangle + r_\beta \cdot e^{i\phi} \cdot |1\rangle$$

hvor vi har kaldt $t_\alpha - t_\beta$ for ϕ .

Herved har vi reduceret udtrykket til tre variable. Men vi kan gå et skridt videre, for også her gælder, at den samlede sandsynlighed er 1, dvs

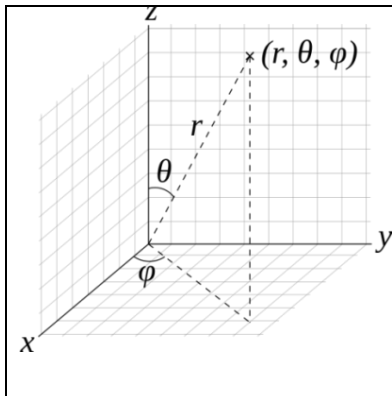
$$r_\alpha^2 + |r_\beta \cdot e^{i\phi}|^2 = 1$$

Men $r_\beta \cdot e^{i\phi}$ er jo et komplekst tal, som kan skrives $x + i \cdot y$, så ovst, formel kan ved brug af Pythagoras skrives: $r_\alpha^2 + x^2 + y^2 = 1$

Dette er ligningen for enhedskuglen.

Sfærisk geometri

Et almindeligt 3D-koordinatsystem er som et 2D-koordinatsystem, hvor der blot er rejst en tredje akse vinkelret på planen i punktet (0,0), som herefter hedder (0,0,0). Akserne tegnes normalt som på figuren herunder til venstre. (Man kalder det et "højrehåndskoordinatsystem", fordi man kan illustrere akserne med højre hånds tommel-, pege-, og langefinger. Prøv! Et punkts xyz-koordinater findes på samme måde som i planen, ved at man går vinkelret ind på hver akse og aflæser værdien, se illustrationen til højre.



Et punkts **sfæriske koordinater** består også af tre tal som angivet på figuren. Når vi vil regne på afstande og vinkler på jordkloden antager vi, at denne er kuglerund, dvs r er et fast tal (6376 km). Det noterer vi os en gang for alle, og anvender herefter to koordinater, φ der angiver længdegraden, og $\theta = 90 - b$, hvor b angiver breddegraden b .

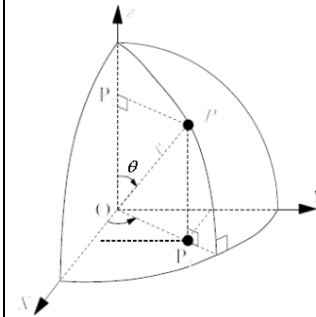
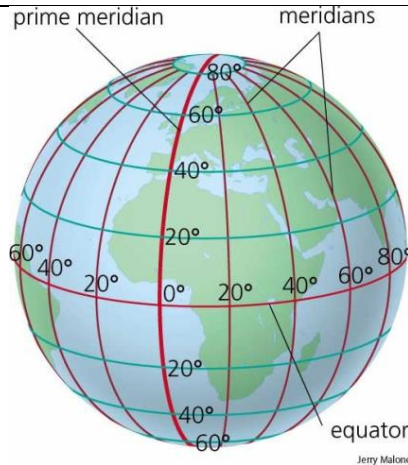


Fig. 1.7. Sfæriske koordinater

En **storcirkel** på kuglen er den størst mulige cirkel, der kan lægges omkring kuglen (fx Jorden). Ækvatorcirklen er ét eksempel på en storcirkel. Cirklen der går gennem nord- og sydpolen er et andet. Men der kan lægges storcirkler på alle mulige måder.

Meridianen for et punkt på Jorden er den halve storcirkel, som forbinder nordpolen og sydpolen, og som går igennem det pågældende punkt.

Længdegraden angiver den vinkel, som den lodrette plan gennem punktet og centrum, er drejet væk fra 0-meridianen. Drejes i Danmarks retning kaldes det østlig længde, drejes modsat kaldes det vestlig længde.

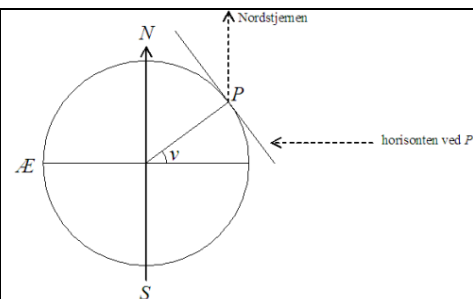


0-meridianen i Greenwich

Breddegraden angiver den vinkel som en linje gennem centrum og punktet danner med ækvatorplanet. Det er v på illustrationen.

Øvelse 1

Argumenter ved hjælp af tegningen for, hvordan man en stjerneklar nat kan bestemme sin egen breddegrad.



Øvelse 2

1. Breddegrad og længdegrad er ofte angivet i grader, minutter og sekunder i stedet for i decimaltal. Hvad er minutter og sekunder og hvordan omregnes de til decimaltal?
2. Find fx via nettet Københavns længdegrad og breddegrad. Hvis de er angivet i minutter og sekunder, så omregn det til decimaltal
3. Hvad er Københavns sfæriske koordinater.

Øvelse 3

1. Jordens omkreds regnes for nemheds skyld til at være 40.000 km. Hvor langt er der fra København til Nordpolen?
2. Hvad er omkredsen af den breddecirkel København ligger på?
3. To punkter A og B på Ækvator har længdegraderne henholdsvis 12° østlig længde og 87° vestlig længde. Hvor langt er der imellem de to punkter.

Sammenhængen mellem sfæriske koordinater og de traditionelle xyz-koordinater er følgende:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot \sin\theta \cdot \cos(\phi) \\ r \cdot \sin\theta \cdot \sin(\phi) \\ r \cdot \cos\theta \end{pmatrix}, \text{ eller hvis vi vælger at regne på en enhedskugle: } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta \cdot \cos(\phi) \\ \sin\theta \cdot \sin(\phi) \\ \cos\theta \end{pmatrix} \quad (*)$$

Øvelse 4

Anvend illustrationerne i starten til at argumentere for denne formel. (Bemærk, at θ ikke er breddegraden, men er 90° – bredden)

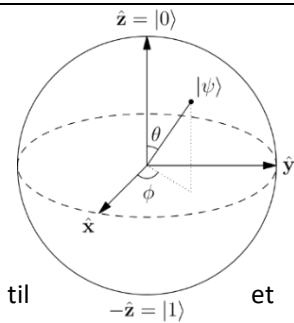
Sfæriske polære koordinater

Vi vender tilbage til ligningen $r_\alpha^2 + x^2 + y^2 = 1$. Vi vil omskrive de rektangulære koordinater (x, y, r_α) til polære sfæriske koordinaterne for tilstandsvektoren. Vi indsætter (*) i udtrykket for $|\psi'\rangle$:

$$\begin{aligned} |\psi'\rangle &= r_\alpha \cdot |0\rangle + r_\beta \cdot e^{i\phi} \cdot |1\rangle \\ |\psi'\rangle &= z \cdot |0\rangle + (x + i \cdot y) \cdot |1\rangle \\ |\psi'\rangle &= \cos(\theta) \cdot |0\rangle + (\sin\theta \cdot \cos(\phi) + i \cdot \sin\theta \cdot \sin(\phi)) \cdot |1\rangle \\ |\psi'\rangle &= \cos(\theta) \cdot |0\rangle + \sin\theta \cdot (\cos(\phi) + i \cdot \sin(\phi)) \cdot |1\rangle \\ |\psi'\rangle &= \cos(\theta) \cdot |0\rangle + e^{i\phi} \cdot \sin(\theta) \cdot |1\rangle \end{aligned}$$

Vi har nu kun de to sfæriske koordinater, og er tæt på at have fundet en måde at visualisere kvantetilstande. Vi mangler et skridt endnu før vi har fat i hele billedet. Vi husker, at de to kvantetilstande "op" og "ned" er ortogonale, samtidig med at de peger i hver sin retning, Det er dette vi ikke kan få beskrevet ordentlig med det traditionelle koordinatsystem, og det som gør anvendelsen af komplekse tal uundværligt.

Vi skal hele tiden huske på, at Bloch-sfæren ikke er noget der "findes" nede i kvanteverden. Det er en matematisk repræsentation af kvantetilstande. Formålet er at give os et overblik og et værktøj til lidt bedre at forstå en mærkelig verden. I makroverden er fx grafer heller ikke noget der findes derude, der er en matematisk repræsentation, der kan give os en bedre indsigt i de fænomener, vi modellerer. I sådanne repræsentationer er det vigtigt, at der er entydige sammenhænge. En bestemt dataværdi svarer til et bestemt punkt på en graf og omvendt. Og en bestemt kvantetilstand skal svare til et bestemt punkt på Bloch-sfæren – og omvendt.



Kvantetilstanden $|\psi'\rangle = \cos(\theta) \cdot |0\rangle + e^{i\phi} \cdot \sin\theta \cdot |1\rangle$ svarer til punktet med de sfæriske koordinater, (θ, ϕ) , og angiver en bestemt retning, hvori vi kunne måle elektronens spin. Måler vi, kan vi få spin op eller spin ned, men begge langs den samme retning. Havde vi i stedet set på tilstanden $-|\psi'\rangle$, der jo er forskellig fra tilstanden $|\psi'\rangle$, så ville vi på Bloch-sfæren få den *samme* retningsakse som vi fik med $|\psi'\rangle$. Vi kan altså ikke vide om en sådan retningsakse hører til

$|\psi'\rangle$ eller $-|\psi'\rangle$. Det er ikke en god repræsentation, når der ikke er en entydig sammenhæng. Så vi har endnu en "reparation" at foretage.

Men lad os lige først bevise, at $|\psi'\rangle$ og $-|\psi'\rangle$ giver samme retningsakse:

Givet $|\psi'\rangle = \cos(\theta) \cdot |0\rangle + e^{i\phi} \cdot \sin(\theta) \cdot |1\rangle$. Punktet lige modsat på kuglen (det "antipodiske punkt") fremkommer ved at lægge $180^\circ = \pi$ til længdegraderne, dvs føre ϕ over i $\phi + 180^\circ (= \phi + \pi)$, og ved at erstatte "nordlig bredde" med "sydlig bredde". Se illustrationen på side 1: Hvis vi spejler punktet i ækvator så vil det nye punkt have en afstand fra sydpolen på θ grader. Dvs den sfæriske koordinat vil være $180^\circ - \theta (= \pi - \theta)$. Lad os nu indsætte disse værdier for det "antipodiske" punkt:

$$\begin{aligned} \cos(180 - \theta) \cdot |0\rangle + e^{i(\phi+180)} \cdot \sin(180 - \theta) \cdot |1\rangle &= \\ -\cos(\theta) \cdot |0\rangle + e^{i\phi} \cdot e^{i180} \cdot \sin(\theta) \cdot |1\rangle &= \\ -\cos(\theta) \cdot |0\rangle + e^{i\phi} \cdot (-1) \cdot \sin(\theta) \cdot |1\rangle &= \\ -(\cos(\theta) \cdot |0\rangle + e^{i\phi} \cdot \sin(\theta) \cdot |1\rangle) &= -|\psi'\rangle \end{aligned}$$

Så $|\psi'\rangle$ og $-|\psi'\rangle$ giver samme retningsakse:

Bloch-sfæren

Vi ønsker en repræsentation, hvor $|0\rangle$ og $|1\rangle$ svarer til spin op og spin ned, dvs er modsat rettede på z-aksen. Vi ser, at hvis vi i udtrykket: $|\psi'\rangle = \cos(\theta) \cdot |0\rangle + e^{i\phi} \cdot \sin(\theta) \cdot |1\rangle$ indsætter:

$$\begin{aligned} \theta = 0 \text{ får vi: } |\psi'\rangle &= \cos(0) \cdot |0\rangle + e^{i\phi} \cdot \sin(0) \cdot |1\rangle = 1 \cdot |0\rangle + e^{i\phi} \cdot 0 \cdot |1\rangle = |0\rangle \\ \theta = \frac{\pi}{2} \text{ får vi: } |\psi'\rangle &= \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot |0\rangle + e^{i\phi} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot |1\rangle = 0 \cdot |0\rangle + e^{i\phi} \cdot |1\rangle = e^{i\phi} \cdot |1\rangle \end{aligned}$$

Ved måling giver dette jo $|1\rangle$, da modulus af $e^{i\phi}$ er 1.

Derfor giver det god mening at indføre en substitution: $\theta' = 2\theta \Leftrightarrow \theta = \frac{\theta'}{2}$, så kvantetilstanden får formen:

$$|\psi'\rangle = \cos\left(\frac{\theta'}{2}\right) \cdot |0\rangle + e^{i\phi} \cdot \sin\left(\frac{\theta'}{2}\right) \cdot |1\rangle$$

hvor de sfæriske koordinater løber i intervallerne: $0 \leq \theta' \leq \pi$ og $0 \leq \phi \leq 2\pi$.

Vi afslutter med at vise, at vi har fået opfyldt den grundlæggende egenskab for spin:

Sætning

Modsatte punkter på en given retningsakse er ortogonale på Blochsfæren

Bevis:

Modsatte punkter på en retningsakse har de sfæriske koordinater:

$$P_1(\theta, \phi) \text{ og } P_2(\pi - \theta, \phi + \pi)$$

Kvantetilstandene er:

$$|\psi_1\rangle = \cos(\theta) \cdot |0\rangle + e^{i\phi} \cdot \sin(\theta) \cdot |1\rangle \text{ og } |\psi_2\rangle = \cos(\pi - \theta) \cdot |0\rangle + e^{i(\phi+\pi)} \cdot \sin(\pi - \theta) \cdot |1\rangle$$

På Bloch-sfæren er de repræsenteret ved:

$$|\psi_1'\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot |0\rangle + e^{i\phi} \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot |1\rangle$$

$$\text{og } |\psi_2'\rangle = \cos\left(\frac{\pi - \theta}{2}\right) \cdot |0\rangle + e^{i(\phi+\pi)} \cdot \sin\left(\frac{\pi - \theta}{2}\right) \cdot |1\rangle$$

Vi reducerer først det sidste udtryk:

$$|\psi_2'\rangle = \cos\left(\frac{\pi-\theta}{2}\right) \cdot |0\rangle + e^{i\phi} \cdot e^{i\pi} \cdot \sin\left(\frac{\pi-\theta}{2}\right) \cdot |1\rangle$$

$$|\psi_2'\rangle = \cos\left(\frac{\pi-\theta}{2}\right) \cdot |0\rangle - e^{i\phi} \cdot \sin\left(\frac{\pi-\theta}{2}\right) \cdot |1\rangle$$

hvor vi har udnyttet den berømte identitet: $e^{i\pi} = -1$

Vi vil vise, de er ortogonale, ved at vise, deres skalarprodukt er 0. Vi er i de komplekse tals verden, så her er skalarprodukt defineret en smule anderledes end i de reelle tals verden:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = u \cdot z + v \cdot \bar{w}, \text{ hvor } \bar{w} \text{ er den komplekst konjugerede til } w$$

Vi udregner nu skalarproduktet af $|\psi_1'\rangle$ og $|\psi_2'\rangle$. Koefficienterne foran $|0\rangle$ (spin op) og $|1\rangle$ (spin ned) er koordinaterne, så vi får:

$$\begin{aligned} \langle \psi_1' | \psi_2' \rangle &= \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi-\theta}{2}\right) + e^{i\phi} \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot (-e^{-i\phi}) \cdot \sin\left(\frac{\pi-\theta}{2}\right) \\ &= \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi-\theta}{2}\right) - e^{i\phi} \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot e^{-i\phi} \cdot \sin\left(\frac{\pi-\theta}{2}\right) \end{aligned}$$

hvor vi har udnyttet, at $e^{i\phi} \cdot e^{-i\phi} = e^{-i\phi} \cdot e^{i\phi} = 1$ (overvej selv dette!).

Da $e^{i\phi} \cdot e^{-i\phi} = e^{i\phi-i\phi} = e^0 = 1$ får vi

$$\langle \psi_1' | \psi_2' \rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi-\theta}{2}\right) - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi-\theta}{2}\right)$$

I kapitlet om den komplekse eksponentialfunktion har vi præsenteret *additionsformlerne* for sinus og cosinus. Her finder vi bl.a.

$$\cos(s+t) = \cos(s) \cdot \cos(t) - \sin(s) \cdot \sin(t)$$

Den kan vi bruge her:

$$\begin{aligned} \langle \psi_1' | \psi_2' \rangle &= \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi-\theta}{2}\right) - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi-\theta}{2}\right) \\ &= \cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi-\theta}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \end{aligned}$$

Hermed er vist, at skalarproduktet er 0, dvs vektorerne er ortogonale.:

Modsatte punkter på Bloch-sfæren repræsenterer ortogonale kvantetilstande