Projekt 9.2 Galileis dilemma – summen af øjnene ved kast med tre terninger

I sandsynlighedsregningens historie findes der meget få konkrete eksempler på håndtering af sandsynligheder, der går forud for Pascals og Fermats berømte korrespondance i 1654, som du kan læse nærmere om i et andet projekt. Galileis dilemma er en af undtagelserne. Hans fyrste og mæcen var optaget af terningekast og interesserede sig især for kast med flere terninger og de summer, man kunne opnå. Ved kast med tre terninger kan man således få summerne 9, 10, 11 og 12, men tilsyneladende optræder de ikke lige hyppigt. Galilei fik da i opdrag at undersøge dette fænomen og finde de præcise sandsynligheder for de fire mulige udfald. Vi får et indtryk af, hvor meget tid disse mennesker brugte på deres spillelidenskab af Galileis tørre konstatering: *"Det er velkendt blandt terningekastere at udfaldene 10 og 11 optræder mere hyppigt end 9 og 12"*.

Øvelse 1
Prøv selv at simulere summen af tre terningekast og foretag en optælling af hyppighederne for de enkelte summer. Hvor mange gange skal du kaste med terningerne for at være rimeligt sikker på at kunne genfinde Galileis påstand? Er fx 1000 gange nok?

Fyrsten forventede at de fire udfald var lige hyppige, for når man ser på hvilke summer der kan være tale om, får man lige mange i hvert tilfælde. Hvis man fx vil frembringe summen 9 kan det gøres sådan

$$9 = 3 + 3 + 3 = 4 + 4 + 1 = 4 + 3 + 2 = 5 + 3 + 1 = 5 + 2 + 2 = 6 + 2 + 1$$

Der er altså netop forskellige 6 måder man kan skrive 9 som en sum af 3 terningekast.

Øvelse 2
Find selv de forskellige måder man kan skrive 10, 11 og 12 som en sum af tre terningekast.

Mange prominente matematikere, herunder Leibniz, er senere faldet i den samme fælde. Men som Galilei påpegede er det *ikke* de forskellige *summer* – de såkaldte *partitioner* eller opdelinger – vi skal finde, men derimod *antallet af* måder, hvorpå vi kan få de enkelte partitioner - de såkaldte *kombinationer* af de tre terninger. Hvis vi bruger farvede terninger, fx rød, grøn og blå er der kun én måde at kaste de tre terninger, der giver 3+3+3, men der er 3 måder at kaste terningerne, så de giver 4 + 4 + 1 (idet alle tre farver kan give 1-tallet) og tilsvarende er der 6 forskellige måder man kan kaste terningerne, så de giver 4 + 3 + 2. I alt fås derfor

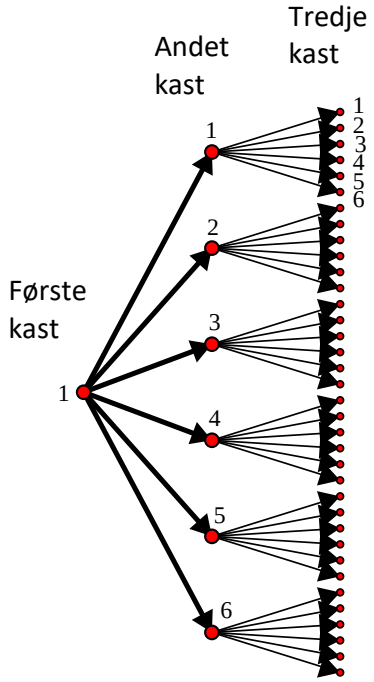
$9 = 3 + 3 + 3$	(1)
$9 = 4 + 4 + 1 = 4 + 4 + 1 = 4 + 4 + 1$	(3)
$9 = 4 + 3 + 2 = 4 + 3 + 2 = 4 + 3 + 2 = 4 + 3 + 2 = 4 + 3 + 2 = 4 + 3 + 2$	(6)
$9 = 5 + 3 + 1 = 5 + 3 + 1 = 5 + 3 + 1 = 5 + 3 + 1 = 5 + 3 + 1 = 5 + 3 + 1$	(6)
$9 = 5 + 2 + 2 = 5 + 2 + 2 = 5 + 2 + 2$	(3)
$9 = 6 + 2 + 1 = 6 + 2 + 1 = 6 + 2 + 1 = 6 + 2 + 1 = 6 + 2 + 1 = 6 + 2 + 1$	(6)
I alt	25

Da der alt i alt er $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$ forskellige måder at kaste tre terninger på er sandsynligheden for at få summen 9 altså givet ved 25/216.

Øvelse 9.15

Find selv sandsynlighederne for at få 10, 11 og 12 som en sum af tre terningekast.

Hvis vi skal have styr på 3 terningekast er det klart at vi må introducerer nye teknikker, da krydstabellen kun rækker til en kombination af to stokastiske variable. En kombination af tre stokastiske variable ville derfor kræve en rumlig tabel i 3-dimensioner. Man kan godt i princippet konstruere en krydstabel for to terningekast kombineret med ét terningekast, men her vil vi i stedet overføre strukturen for et tælletræ til regnearkets lister: Hvert af udfaldene for den første terning kan kombineres med hvert af udfaldene for den anden terning, der tilsvarende kan kombineres med hvert af udfaldene for den tredje terning: Figuren viser et udsnit af valgtræet, idet tælletræet fortsætter nedad med yderligere 5 kopier, hvor vi næste gang kombinerer udfaldet 2 i det første kast med hvert af udfaldene for den anden terning osv. Det første kast består af 36 celler med 1, 36 celler med 2 osv. Det andet består af 6 celler med 1, seks celler med 2 osv. indtil vi har udfyldt de første 36 celler. Derefter gentages strukturen i alt 6 gange. Det tredje kast består af udfaldene 1, 2, 3, 4, 5 og 6 gentaget i alt 36 gange. Oprettes listerne i et regneark, er det nu ikke svært at beregne summen af de tre lister svarende til summen af øjetallene.



Dermed har vi fået opbygget en ideel population svarende til summen af tre terningekast.

Øvelse 9.16

a) Opstil et histogram for sandsynlighedsfordelingen hørende til summen af tre terningekast.

b) Udregn middelværdien μ og spredningen σ.

c) Afsæt de værdier, som netop ligger i afstanden 1 spredning σ fra middelværdien μ. Hvad svarer de til på histogrammet?

d) Bestem de normale og exceptionelle udfald. Konklusion?

Øvelse 9.17

a) Find sammenhængen mellem middelværdi og spredning for summen af øjnene ved kast med 1 terning, kast med 2 terninger og kast med tre terninger? Konklusion: Hvilken regel synes der at gælde generelt?

b) Hvor mange terninger skal man kaste, før der dukker exceptionelle udfald op?